10. Kurven

Im Folgenden sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und X ein Banachraum (meist $X = \mathbb{R}^n$ mit $\|\cdot\|_2$).

10.1. Definition.

(a) Eine stetige Abbildung $f : D \to X$ heißt auch Kurve in X.

(b) Ist f in $t \in D$ differenzierbar, so heißt $f'(t)$ Tangentialvektor an die Kurve f in t.

(c) Ist f differenzierbar und $f'(t_0) = 0$, so heißt t_0 singulärer Punkt. Sind alle Punkte nicht-singulär, so heißt f reguläre Kurve.

10.2. Beispiele.

(a) Sei $r > 0$. Definiere $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (r\cos t, r\sin t)$: Kreis vom Radius r. Tangentialvektor $f'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$. Regulär.

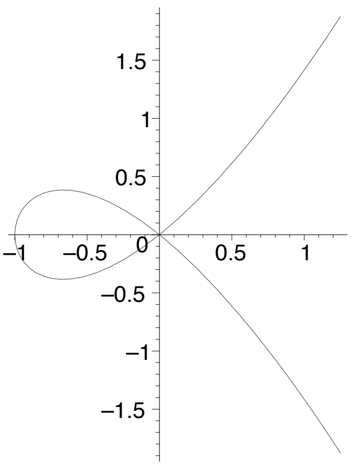
(b) Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $f(t) = a + vt$: Gerade durch a mit Richtungsvektor (=Tangentialvektor) v. Regulär.

(c) Sei $r > 0$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (r\cos t, r\sin t, ct)$: Schraubenlinie. Regulär.

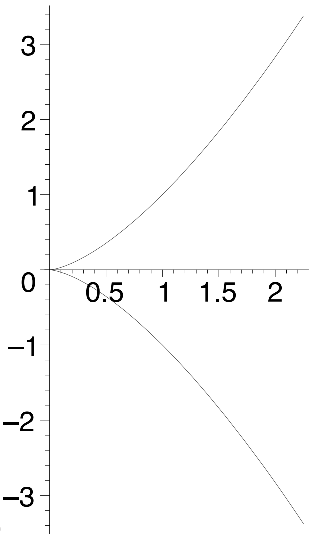
(d) Sei $\varphi : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktion. Definiere $f : D \to \mathbb{R}^2$ durch $f(t) = (t, \varphi(t))$: Graph der Kurve. Regulär.

(e) $f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t), t \in \mathbb{R}$. Damit gilt $\operatorname{Bild} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2 + x^3\}$. Beachte: $f(1) = f(-1) = (0, 0), f'(1) = (2, 2), f'(-1) = (-2, 2)$ (Selbstüberschneidung). Regulär.

(f) $f(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Hier ist $\operatorname{Bild} f = \{(x, y) : x \geq 0, y = x^{3/2}\}$. Neilsche Parabel. Singulärer Punkt in $t = 0$.



zu (e)



zu (f)

10.3. Schnittwinkel. Sind $f : D_1 \to \mathbb{R}^n, g : D_2 \to \mathbb{R}^n$ zwei reguläre Kurven und ist $f(t_1) = g(t_2)$ für geeignete $t_1 \in D_1$, $t_2 \in D_2$, so heißt die Zahl

$$\vartheta = \arccos \frac{\langle f'(t_1), g'(t_2)\rangle}{\|f'(t_1)\| \, \|g'(t_2)\|}$$

der Schrittwinkel von f und g im Punkt $f(t_1) = g(t_2)$. Dabei ist $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ das Skalarprodukt der Vektoren x und y im $\mathbb{R}^n$. Stets ist $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ für die 2-Norm (Cauchy-Scharzsche Ungleichung) und somit ϑ sinnvoll definiert.

10.4. Rektifizierbarkeit, Länge. Es sei $f : [a,b] \to X$ eine Kurve und

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$$

eine Partition von $[a,b]$. Dann ist

$$\mathrm{Pol}\,(f; t_0, \ldots, t_N) = \sum_{j=1}^{N} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|$$

die Länge des Polygonzugs durch $f(t_0) \ldots f(t_k)$. Man nennt f rektifizierbar mit Länge $L = L(f)$, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für jede Partition $a = t_0 < \ldots < t_k = b$ der Feinheit $< \delta$

$$|L(f) - \mathrm{Pol}\,(f; t_0, \ldots, t_N)| < \varepsilon.$$

10.5. Satz. *Ist $f : [a,b] \to X$ stetig differenzierbar, so ist f rektifizierbar mit der Länge*

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt.$$

Beweis. Erinnerung: umgekehrte Dreiecksungleichung $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$, vgl. 2.4(f).

Es sei $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f' existiert ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass

$$\|f'(t) - f'(t')\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \text{ falls } |t - t'| < \delta.$$

Wählen wir eine Partition $t_0 < \ldots t_N$ von Feinheit $< \delta$, so gilt:

$$\begin{aligned}
&\left| \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\| dt \right| \\
\le\ & \big| \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| - \|f'(t_j)\|(t_j - t_{j-1}) \big| + \left| \|f'(t_j)\|(t_j - t_{j-1}) - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\| dt \right| \\
\le\ & \|f(t_j) - f(t_{j-1}) - f'(t_j)(t_j - t_{j-1})\| + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big| \|f'(t_j)\| - \|f'(t)\| \big|\ dt \ \text{ (umgek. Dreiecks-U.)} \\
\le\ & \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t) - f'(t_j)\ dt \right\| + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t_j) - f'(t)\|\ dt \ \text{ (umgek. Dreiecks-U.)} \\
\le\ & 2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t_j) - f'(t)\|\ dt \\
\le\ & 2 \sup\{\|f'(t_j) - f'(t)\| : t \in [t_{j-1}, t_j]\}(t_j - t_{j-1}).
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\left| \mathrm{Pol}\,(f; t_0, \ldots, t_N) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \le 2 \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

◁

10.6. Beispiel. Seien $r, \alpha > 0$. Betrachte $f : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^2, f(t) = (r\cos t, r\sin t)$. Dann ist $\|f'(t)\| = r$ für alle t nach 10.2(a), also

$$L(f) = \int_0^\alpha r\, dt = r\alpha.$$

Speziell: α ist Bogenlänge im Einheitskreis von dem Punkt $(1,0)$ zu dem Punkt $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, bzw., komplex betrachtet, von 1 zu $e^{i\alpha}$.

10.7. Definition. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Ist $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine stetig differenzierbare Funktion und gilt

$$\begin{aligned} \varphi : [\alpha, \beta] &\to [a, b] \quad \text{ist bijektiv} \\ \varphi^{-1} : [a, b] &\to [\alpha, \beta] \quad \text{ist stetig differenzierbar,} \end{aligned}$$

so heißt φ Parametertransformation.

Beachte: Weil φ und φ^{-1} stetig differenzierbar sind, ist $\varphi'(t) \neq 0 \ \forall t$.

Weil φ bijektiv ist, ist φ entweder monoton wachsend oder monoton fallend, also entweder $\varphi' > 0$ und $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ (orientierungserhaltend) oder $\varphi' < 0$ und $\varphi(\alpha) = b, \varphi(\beta) = a$ (orientierungsumkehrend).

10.8. Satz. *Die Kurvenlänge ist von der Parametrisierung unabhängig, d. h., sind φ, f wie in 10.7 und $F : [\alpha, \beta] \to X$ definiert durch $F(t) = f(\varphi(t))$, so gilt*

$$L(f) = L(F).$$

Beweis. Nach der Kettenregel ist $F'(t) = f'(\varphi(t)) \circ \varphi'(t)$, also für $\varphi' > 0$:

$$L(F) = \int_\alpha^\beta \|F'(t)\| \, dt = \int_\alpha^\beta \|f'(t)\| \varphi'(t) \, dt = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt = L(f).$$

Für $\varphi' < 0$ analog. $\lhd$

10.9. Bemerkung. Tangentialvektor: Wegen $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi) \cdot \varphi'$ gilt: gleiche Richtung für orientierungserhaltendes φ, entgegengesetzte für orientierungsumkehrendes φ.

Der Winkel zwischen zwei Kurven bleibt wegen obiger Identität gleich bei orientierungserhaltenden Parametertransformationen.

10.10. Parametrisierung nach der Bogenlänge. Es sei $f : [a, b] \to X$ stetig differenzierbar mit Länge L und $f'(t) \neq 0$ für alle t. Dann ist $\psi : [a, b] \to [0, L]$, definiert durch

$$\psi(t) = \int_a^t \|f'(s)\| \ ds$$

differenzierbar nach 8.11 mit Ableitung $\psi'(t) = \|f'(t)\| > 0$. Somit ist ψ stetig differenzierbar und streng monoton wachsend. Es gibt daher eine stetige Umkehrfunktion φ. Diese ist stetig nach 5.14 und differenzierbar nach 7.8. Für die Ableitung gilt: $\varphi(s) = \frac{1}{\psi'(\varphi(s))}$. Somit ist $\varphi : [0, L] \to [a, b]$ stetig differenzierbar, also eine Parametertransformation.

Die Kurve $f \circ \varphi : [0, L] \to X$ hat dann die Eigenschaft, dass die Länge der über $[0, x]$, $x \leq L$ durchlaufenen Kurve genau x ist:

$$\begin{aligned} \int_0^x \|(f \circ \varphi)'(t)\| dt &= \int_0^x \|f'(\varphi(t))\| \ |\varphi'(t)| \ dt = \int_0^x \|f'(\varphi(t))\| \ \varphi'(t) \ dt \\ &= \int_a^{\varphi(x)} \|f'(s)\| \ ds = \psi(\varphi(x)) = x. \end{aligned}$$