1. Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen sind die Zahlen, mit denen wir gewöhnlich rechnen. Sie enthalten Elemente wie 2, e, π oder $\sqrt[5]{3}$. In diesem Kapitel geht es darum, ihren axiomatischen Aufbau und die Rolle der einzelnen Axiome darin zu verstehen. Als wichtiges Beweismittel lernen wir die vollständige Induktion kennen.

Zunächst aber einige Grundbegriffe und Bezeichnungsweisen.

1.1. Aussagen. Mengen. Eine Aussage nennen wir etwas, von dem wir sagen können, ob es wahr ist oder falsch.

Aus zwei Aussagen A und B können wir neue Aussagen bilden, z.B. die Aussage $A \Rightarrow B$ („aus A folgt B“). Sie ist falsch, wenn die Aussage A wahr ist und die Aussage B falsch. Ansonsten ist sie wahr.

Wichtig ist auch die Aussage $A \Leftrightarrow B$ („A ist äquivalent (gleichwertig) zu B“). Sie ist wahr, wenn die Aussagen A und B entweder beide wahr oder beide falsch sind.

Oder (gleichwertig): Sie ist wahr, wenn sowohl die Aussage $A \Rightarrow B$ als auch die Aussage $B \Rightarrow A$ gilt, und ansonsten falsch.

Die Begriffe „Menge“, „Element“ und „enthalten sein“ definieren wir nicht.

Wir schreiben $x \in M$, falls x in der Menge M enthalten ist, anderenfalls $x \notin M$. Wir schreiben $M = N$; falls die Mengen M und N dieselben Elemente enthalten, sonst $M \neq N$. Wichtig: Alle Elemente einer Menge sind verschieden.

Für mehr Details siehe z. B. P. Halmos: *Naive Mengenlehre* oder Lévy: *Basic Set Theory*.

1.2. Bekannte Mengen.

$\emptyset$	leere Menge
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	natürliche Zahlen ohne Null
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$	natürliche Zahlen einschließlich Null
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$	rationale Zahlen

Dabei sieht man die Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ in $\mathbb{Q}$ als gleich an, falls $ps = rq$.
Beispiel: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{24}{36}$.

Oft beschreibt man Mengen auch in der Form:
$\{x :$ „Aussage über x“$\}$ bezeichnet die Menge aller Elemente, für die die Aussage gilt. Beispiel: $\mathbb{N} = \{x : x \in \mathbb{N}_0 \text{ und } x \neq 0\}$. Kurz: $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \neq 0\}$

1.3. Definition. Es seien M, N Mengen. Wir vereinbaren folgende Schreib- und Sprechweisen.

(a) Schreibe $M \subseteq N$, falls aus „$x \in M$“ stets „$x \in N$“ folgt — “M ist Teilmenge von N”

(b) $M \cup N = \{x : x \in M \quad \text{oder} \quad x \in N\}$ — “Vereinigung von M und N”

(c) $M \cap N = \{x : x \in M \quad \text{und} \quad x \in N\}$ — “Durchschnitt von M und N”

(d) $M \setminus N = \{x : x \in M \quad \text{und} \quad x \notin N\}$ — “Differenzmenge von M und N”

(e) $M \times N = \{(x, y) : x \in M \quad \text{und} \quad y \in N\}$ — “kartesisches Produkt von M und N”

(f) $\mathcal{P}(M) = \{N : N \subseteq M\}$ — “Potenzmenge von M”

Man nennt M und N disjunkt, falls $M \cap N = \emptyset$.

Man kann auch Durchschnitte und Vereinigungen über mehrere (möglicherweise unendlich viele) Mengen bilden. Es sei I eine Menge, und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Menge. Wir setzen

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \{x : x \in M_i \quad \text{für jedes } i \in I\}$$

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x : x \in M_i \quad \text{für mindestens ein } i \in I\}$$

1.4. Reelle Zahlen. Die reellen Zahlen sind eine Menge $\mathbb{R} \neq \emptyset$, die durch folgende Eigenschaften charakterisiert ist:

(a) Auf $\mathbb{R}$ sind zwei Operationen definiert, nämlich „+“, die „Addition“, und „·“, die „Multiplikation“, die je zwei Elementen x, y die Summe $x + y \in \mathbb{R}$ bzw. das Produkt $x \cdot y = xy \in \mathbb{R}$ zuordnen (Malpunkt wird meist nicht geschrieben). Dabei gelten folgende Regeln („Axiome“):

(A1): $(x + y) + z = x + (y + z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ Assoziativgesetz der Addition
(A2): Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$ mit $x + 0 = x$ für alle x Neutralelement der Addition
(A3): Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein Element $(-x) \in \mathbb{R}$ mit $x + (-x) = 0$ Inverses Element der Addition
(A4): $x + y = y + x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ Kommutativgesetz der Addition
(M1): $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ Assoziativgesetz der Multiplikation
(M2): Es gibt ein von 0 verschiedenes Element $1 \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ Neutralelement der Multiplikation
(M3): Zu jedem $x \neq 0$ existiert ein Element x^{-1} mit $xx^{-1} = 1$ Inverses Element der Multiplikation
(M4): $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ Kommutativgesetz der Multiplikation
(D): $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ Distributivgesetz.

(b) $\mathbb{R}$ ist ferner *angeordnet*, d. h. es gibt eine Beziehung „> 0“ („größer Null“) mit folgenden Eigenschaften:

(O1): Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen

$$x > 0, \quad x = 0, \quad \text{oder} \quad -x > 0.$$

Insbesondere kann also für $x \neq 0$ nie $x = -x$ gelten!
(O2): $x > 0$ und $y > 0 \Longrightarrow x + y > 0$.
(O3): $x > 0$ und $y > 0 \Longrightarrow xy > 0$.

(c) Schließlich erfüllt $\mathbb{R}$ noch das sogenannte Supremumsaxiom

(S): Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat eine kleinste obere Schranke. (Mehr dazu gleich!)

1.5. Bemerkung. Es stellt sich die Frage, ob solch eine Menge überhaupt existiert. Das ist der Fall; wir wollen es aber hier nicht beweisen, sondern gehen davon aus, dass wir $\mathbb{R}$ zur Verfügung haben.

1.6. Definition. Eine Menge mit mindestens zwei Elementen, in der die Axiome (A1)-(A4), (M1)-(M4) und (D) gelten, heißt Körper.
Ein Körper mit ‘>’, in dem (O1)-(O3) gelten, heißt angeordneter Körper.

1.7. Beispiel.

(a) $\mathbb{Q}$ ist Körper, $\mathbb{Z}$ nicht (2 hat z.B. kein multiplikatives Inverses).

(b) Die Menge $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ ist Körper mit den Operationen $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 1$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$.

(c) $\mathbb{Q}$ ist angeordnet, $\mathbb{Z}_2$ hingegen nicht (1+1=0!).

(d) In $\mathbb{Q}$ gilt das Supremumsaxiom nicht, wie wir später sehen werden.

1.8. Bezeichnungen.

(a) Statt $x + (-y)$ schreiben wir auch $x - y$, statt $x \cdot y^{-1}$ auch $\frac{x}{y}$.

(b) Wir schreiben:

$$\begin{array}{lcl} „x > y\text{“} & \iff & x - y > 0 \\ „x < y\text{“} & \iff & y - x > 0 \\ „x \geq y\text{“} & \iff & (x > y \text{ oder } x = y) \\ „x \leq y\text{“} & \iff & (x < y \text{ oder } x = y) \end{array}$$

1.9. Beschränktheit. Supremum. Maximum/Minimum.

(a) $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ heißt nach oben beschränkt, falls ein $C \in \mathbb{R}$ existiert mit $x \leq C$ für alle $x \in M$. Die Zahl C heißt dann obere Schranke.

M heißt nach unten beschränkt, falls ein $D \in \mathbb{R}$ existiert mit $D \leq x$ für alle $x \in M$ (untere Schranke).

M heißt beschränkt, falls es nach oben und nach unten beschränkt ist.

(b) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset$. Eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* von M oder *kleinste obere Schranke* von M, wenn gilt

(1) $x \leq C$ für alle $x \in M$ (d.h. C ist obere Schranke)

(2) C ist kleinste obere Schranke, d.h. zu jeder Zahl $D < C$ existiert ein $x \in M$ mit $x > D$ (d.h. D ist *keine* obere Schranke).

(c) Ist C ein Supremum für die nichtleere Menge M, und zusätzlich $C \in M$, so heißt C Maximum von M.

(d) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ heißt Infimum für M, falls C größte untere Schranke ist, d. h., falls (1) $x \geq C$ für alle $x \in M$ und (2) Für jedes $D > C$ ein $x \in M$ existiert mit $x < D$. Ist C Infimum von M und $C \in M$, so heißt C Minimum.

1.10. Satz.

(a) $x \cdot 0 = 0$ *für beliebiges* $x \in \mathbb{R}$.

(b) $(-x)y = -(xy)$ *für beliebige* $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) *Es seien* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *und* $a \neq 0$. *Dann gibt es genau ein* $x \in \mathbb{R}$, *das die Gleichung* $ax + b = c$ *erfüllt, nämlich* $x = a^{-1}(c - b)$.

Insbesondere ist das additive Inverse von b *(als Lösung von* $1 \cdot x + b = 0$*) eindeutig, und es gilt* $-(-b) = b$, *weil sowohl* b *als auch* $-(-b)$ *additive Inverse zu* $-b$ *sind. Analog ist das multiplikative Inverse von* a *(als Lösung von* $ax = 1$*) eindeutig und* $(a^{-1})^{-1} = a$.

(d) $xy = 0 \iff (x = 0$ *oder* $y = 0)$.

Beweis.

(a) $x \cdot 0 \overset{\text{A2}}{=} x \cdot (0 + 0) \overset{\text{D}}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0$. Addition von $-(x \cdot 0)$ liefert $0 = x \cdot 0$.

(b) $0 \overset{\text{(a)}}{=} 0 \cdot y \overset{\text{A3}}{=} (x + (-x))y$. Addition von $-(xy)$ liefert $-(xy) = (-x)y$.

(c) Die Gleichung wird durch $x = a^{-1}(c - b)$ gelöst:

$$a(a^{-1}(c - b)) + b \overset{\text{Def}}{=} a((c + (-b))(a^{-1})) + b \overset{\text{A4}}{=} a((a^{-1}(c + (-b)))) + b$$
$$\overset{\text{A1}}{=} (a(a^{-1}))(c + (-b)) + b \overset{\text{M3}}{=} 1 \cdot (c + (-b)) + b \overset{\text{M2,A1}}{=} c + ((-b)) + b) \overset{\text{A3}}{=} c + 0 \overset{\text{A2}}{=} c.$$

Sei andererseits x Lösung. Dann liefert die Addition von $-b$

$$ax + b + (-b) = c + (-b), \quad \text{also } ax = b - c \text{ bzw. nach Multiplikation mit } a^{-1}:$$
$$a^{-1}(ax) = a^{-1}(c - b) \quad \text{bzw.} \quad x = a^{-1}(c - b)$$

(d) Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so ist $xy = 0$ nach (a). Ist andererseits $xy = 0$ und $x \neq 0$, so liefert die Multiplikation mit x^{-1}

$$y \overset{\text{M3,M4}}{=} (x^{-1}x)y \overset{\text{M1}}{=} x^{-1}(xy) \overset{\text{Ann}}{=} x^{-1}0 \overset{\text{(a)}}{=} 0$$

Analog liefert $y \neq 0$, dass $x = 0$ ist. Also ist $x = 0$ oder $y = 0$. ◁

1.11. Satz. *Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt*

(a) $a \neq 0 \Rightarrow aa > 0$, *insbesondere:* $1 = 1 \cdot 1 > 0$ *und daher* $(-1) < 0$.

(b) $a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc$

(c) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$

(d) $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ *und* $\frac{b}{a} > 1$

(e) $a < b, b > 0, 0 < c < d \Rightarrow ac < bd$

(f) $a, b > 0$. *Dann ist* $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

Beweis.

(a) Fall 1: $a > 0$. Dann folgt aus (O3): $aa > 0$
Fall 2: $-a > 0$. Dann ist wegen (O3): $(-a)(-a) > 0$. Nun ist $(-a)(-a) \overset{1.10(b)}{=} -(a(-a)) \overset{(M4),1.10(b)}{=} -(-aa) \overset{1.10(c)}{=} aa$, also $aa > 0$.

(b) $b - a > 0, -c > 0 \overset{(O3)}{\Rightarrow} (b-a)(-c) > 0 \overset{1.10b}{\Longleftrightarrow} -bc + ac > 0 \Longleftrightarrow ac > bc$.

(c) Wäre $a^{-1} = 0$, so wäre $1 = aa^{-1} = a \cdot 0 \overset{1.10a}{=} 0$ im Widerspruch zu (M2): $1 \neq 0$.
Wäre $-a^{-1} > 0$, so wäre $-1 = a(-a^{-1}) \overset{O3}{>} 0$ im Widerspruch zu (a).
Bleibt nur $a^{-1} > 0$!

(d) Nach (c) ist $a^{-1} > 0, b^{-1} > 0$. Aus $b - a > 0$ folgt $(b-a)a^{-1} > 0$ (wegen (O3)) bzw. $\frac{b}{a} - 1 > 0$. Weitere Anwendung von (O3) liefert

$$\left(\frac{b}{a} - 1\right) b^{-1} > 0 \iff \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0.$$

(e)

$$\left.\begin{array}{rcl} b - a > 0 & \overset{(O3)}{\Longrightarrow} & bc - ac > 0 \\ b > 0 & \Longrightarrow & bd - bc > 0 \end{array}\right\} \overset{(O2)}{\Longrightarrow} bd - ac > 0$$

(f) (1) Ist $a < b$, so ist nach (e) $a^2 < b^2$.
(2) Ist $a = b$, so ist $a^2 = b^2$.
(3) Ist $a > b$, so ist $a^2 > b^2$ nach (e).
Es folgt die Behauptung.

1.12. Beispiel zum Supremum. Die Menge $\{\frac{x}{1+x} : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ hat das Supremum 1, weil

(1) $\frac{x}{1+x} < 1$ für alle $x > 0$, d.h. 1 ist eine obere Schranke.

(2) Es gibt keine kleinere obere Schranke: Für jede Zahl $D < 1$ gilt

$$\frac{x}{1+x} > D \Leftrightarrow x > D + Dx \Leftrightarrow x(1-D) > D \Leftrightarrow x > \frac{D}{1-D}$$

also z.B. falls $x = \frac{D}{1-D} + 1$ (nach 1.11(c) und (O2)).
Beachte: 1 ist kein Maximum, weil $\frac{x}{1+x} < 1$ für alle $x > 0$.

1.13. Definition. Für $a \in \mathbb{R}$ definiert man $|a|$ („Betrag von a", „a Betrag")

$$|a| = \begin{cases} a\,, & \text{wenn} \quad a \geq 0 \\ -a\,, & \text{wenn} \quad a < 0 \end{cases}.$$

1.14. Satz. *Seien $a, b, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Dann gilt*

(a) $|a| \geq 0$.

(b) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

(c) $|a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a$ *und* $a < \varepsilon$. *Schreibe:* $-\varepsilon < a < \varepsilon$.

(d) $|a + b| \leq |a| + |b|$.

(e) $|ab| = |a||b|$.

Beweis. Klar.

(a) Für $a \geq 0$ klar. Für $a < 0$ ist $|a| = -a > 0$.

(b) Für $a > 0$ ist $|a| = a > 0$. Für $a < 0$ ist $|a| = -a > 0$.

(c) Ist $a \geq 0$, so folgt aus $|a| < \varepsilon$, dass $0 \leq a < \varepsilon$
Ist $a < 0$, so folgt aus $|a| < \varepsilon$, dass $0 < -a < \varepsilon$, also $-\varepsilon < a < 0$.
Also: $|a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a < \varepsilon$.

(d) Gilt $a, b \geq 0$, so ist $a+b \geq 0$ und somit $|a+b| = a+b = |a|+|b|$. Für $a, b \leq 0$ ist $a+b \leq 0$ und $|a+b| = -(a+b) = (-a)+(-b) = |a|+|b|$. Ist $a < 0 < b$, so ist entweder $|a+b| = a+b$. Dann ist $|a + b| = a + b < b = |b| < |a| + |b|$ oder $|a + b| = -b - a < -a = |a| < |a| + |b|$. Ebenso für $b < 0 < a$.

(e) Folgt, weil $|-a| = |a|$ mit Fallunterscheidung.

$\triangleleft$

1.15. $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wir nennen eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ induktiv, falls gilt: (i) $1 \in M$ und (ii) $n + 1 \in M$, falls $n \in M$. Man definiert nun $\mathbb{N}$ als den Durchschnitt über alle induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$. Damit haben wir auch $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$; ebenso $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Die Menge $\mathbb{N}$ ist nach oben unbeschränkt: Wäre sie beschränkt und hätte etwa das Supremum s, so gäbe es (nach Definition des Supremums) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s - 1/2$. Dann ist aber $n + 1$ ein Element von $\mathbb{N}$, das größer ist als s. Widerspruch.

Das Prinzip der vollständigen Induktion.

1.16. Satz. (Vollständige Induktion) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Um die Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, genügt es, folgendes zu zeigen:*

(1) *$A(1)$ ist richtig (Induktionsanfang).*

(2) *Für jedes $n \geq 1$ gilt: Ist $A(n)$ richtig, so ist auch $A(n + 1)$ richtig (Induktionsschritt).*

Beweis. Die Menge aller n für die $A(n)$ richtig ist, ist eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$, also $= \mathbb{N}$. $\triangleleft$

Viele Beispiele folgen noch.

1.17. Quantoren.

Wir benutzen folgende Abkürzungen

$\forall$ „für alle"
$\exists$ „es existiert mindestens ein ..."
$\exists!$ „es existiert genau ein ..."

1.18. Schreibweise für Summen, Produkte, Fakultäten. Es seien $m, n \in \mathbb{Z}, m \le n$. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ mit $m \le k \le n$ sei a_k eine reelle Zahl. Setze

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \quad := \quad a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n;$$
$$\prod_{k=m}^{n} a_k \quad := \quad a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n.$$

(:= heißt: Wir definieren die Seite mit dem Doppelpunkt durch die andere.)
Für $m > n$ setze $\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$, $\prod_{k=m}^{n} a_k := 1$ (leere Summe, leeres Produkt).

Fakultät: Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze

$$n! \quad := \quad \prod_{k=1}^{n} k \quad (\text{ausführlich } = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$$
$$\text{Insbesondere ist } \; 0! \quad = \quad 1$$

Binomialkoeffizient: Für $k, n \in \mathbb{N}_0, n \ge k$ sei

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Nützliche Identität („Pascalsches Dreieck“): Für $1 \le k \le n$:

(1) $$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

1.19. Definition. Es sei $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$- Wir setzen $a^n = \prod_{k=1}^{n} a$; insbesondere $a^0 = 1$. Für $a \neq 0$ setze $a^{-n} = \prod_{k=1}^{n} a^{-1}$.

1.20. Satz. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $a^m a^n = a^{m+n}$ *für alle* $m, n \in \mathbb{N}_0$.

(b) $a^m a^n = a^{m+n}$ *für alle* $m, n \in \mathbb{Z}$, *falls* $a \neq 0$.

(c) $a^m b^m = (ab)^m$ *für alle* $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Alles mit Hilfe der vollständigen Induktion.
(a) Wir sehen zunächst: $a^m a = \big(\prod_{k=1}^{m} a\big)a = \prod_{k=1}^{m+1} a = a^{m+1}$ für $m \in \mathbb{N}_0$. Diese Aussage ist dann der Induktionsanfang für den Beweis der Aussage, dass, bei festem m, gilt: $a^m a^n = a^{m+n}$.
Induktionsannahme: Es sei $a^m a^k = a^{m+k}$ für ein festes k.
Induktionsschritt: $a^m a^{k+1} = a^m(a^k a)$ (nach obigem) $= (a^m a^k)a$ (nach Assoziativgesetz) $= a^{m+k}a$ (nach Induktionsannahme) $= a^{m+k+1}$. Den Fall, dass $m = 0$ oder $n = 0$ gilt, haben wir bisher weggelassen: Es ist $a^m a^0 = a^m = a^{m+0}$; ebenso $a^0 a^n = 1a^n = a^n = a^{0+n}$.
(b) Ähnlich [Für $m, n \ge 0$ ist die Aussage bereits bewiesen. Für $m, n < 0$ folgt sie sofort durch Anwendung von (a) auf $1/a$. Wegen des Kommutativgesetzes genügt es also, den Fall zu betrachten, dass $m \ge 0$ und $n < 0$ ist. Zuerst zeigen wir $a^m/a = a^{m-1}$ mit vollständiger Induktion nach m (selbst machen). Dies benutzen wir dann als Induktionsanfang für die Aussage, dass bei festem m gilt: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.] ◁

Weitere Aussagen, die sich leicht mit vollständiger Induktion beweisen lassen.

1.21. Satz. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Mit vollständiger Induktion: Für $n = 1$ ist die Aussage, dass $\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1\cdot 2}{2}$ bzw., dass $1 = 1$, also richtig. Stimmt sie für ein n, so schließen wir folgendermaßen, dass sie auch für $n+1$ gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

1.22. Satz. *„Binomischer Lehrsatz“: Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Insbesondere: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$ *und* $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0.$

Beweis. Für $n = 1$ ist die Aussage, dass $a + b = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ bzw. $a + b = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0$, somit richtig. Gilt sie für ein $n \in \mathbb{N}$, so schließen wir folgendermaßen auf die Gültigkeit für $n+1$:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)(a+b) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \text{(indem wir den Laufindex der ersten Summe in } l = k+1 \text{ ändern)} \\ &\quad \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^l b^{n-l+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \text{ Zurückbenennen, Terme für } k = 0 \text{ und } n+1 \text{ extra. Zusammenfassen} \\ &\quad a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} + a^0 b^{n+1} \\ &= \text{ weil } \binom{n+1}{n+1} = \binom{n+1}{0} = 1 \text{ und } \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \\ &\quad \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.\end{aligned}$$

◁

1.23. Satz. *Für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, und $n \in \mathbb{N}_0$ ist*

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad \text{„endliche geometrische Reihe“.}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}(1-a)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right) &= \sum_{k=0}^{n} a^k - \left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right)a \\ &= \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k \\ &= 1 - a^{n+1}.\end{aligned}$$

Für $a \neq 1$ folgt bei Division durch $1 - a$ die Behauptung. $\triangleleft$ $\triangleleft$

1.24. Satz. *„Bernoullische Ungleichung". Für $a \in \mathbb{R}$, $a \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist*

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Beweis. Mit vollständiger Induktion.
Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist die Behauptung $1 \geq 1$ richtig.
Induktionsschritt: Es gelte $(1 + a)^n \geq 1 + na$. Multiplikation mit $(1 + a)$ ($\geq$ Null) liefert

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a, \qquad \text{da} \quad na^2 \geq 0.$$

$\triangleleft$

1.25. Intervalle. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir setzen:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
[a,\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
]a,\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\
]-\infty,a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\
]-\infty,a[&= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}
\end{aligned}$$

1.26. Satz. *Es gibt keine rationale Zahl mit Quadrat 2.*

Beweis. Sei $p/q \in \mathbb{Q}$ mit $p^2/q^2 = 2$. Dann ist $p^2 = 2q^2$. Daher ist p^2 gerade. Also p gerade, denn Quadrate ungerader Zahlen sind ungerade. Es gibt also ein $p_1 \in \mathbb{Z}$ mit $p = 2p_1$. Es folgt: $p^2 = 4p_1^2$ ist durch 4 teilbar. Wegen $q^2 = p^2/2$ ist q^2 durch 2 teilbar. Also ist auch q gerade, d.h. $q = 2q_1$ für ein $q_1 \in \mathbb{N}$.
Auf p_1 und q_1 können wir das gleiche Argument anwenden. Wir finden also zu jedem j ganze Zahlen p_j und q_j mit $p = 2^j p_j$ und $q = 2^j q_j$ und $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)^2 = 2$. Insbesondere ist also $p_j \neq 0$ und somit $|p| \geq 2^j$ für beliebiges j. Dies kann nicht sein, denn stets ist $2^p > p$ (das sieht man leicht mit vollständiger Induktion). $\triangleleft$

1.27. Lemma. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Gilt für jedes $\delta > 0$, dass $a < b + \delta$ ist, so ist $a \leq b$.*

Beweis. Wäre $a > b$, so ergibt sich für $\delta = a - b > 0$ ein Widerspruch:

$$a < b + \delta = b + (a - b) = a.$$

$\triangleleft$

1.28. Satz. Existenz der Quadratwurzel. Es sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ mit $x^2 = a$. Schreibe $x = \sqrt{a}$ oder $x = a^{1/2}$.

Beweis. Die Menge $M = \{r > 0 : r^2 \leq a\}$ ist nichtleer: Ist $a < 1$, so ist $a^2 \leq a$, also $a \in M$; ist $a \geq 1$, so ist $1^2 = 1 \leq a$, also $1 \in M$.
Sie ist ferner beschränkt, denn für $C > 1 + a$ ist $C^2 > (1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 > a$; somit ist C eine obere Schranke.
Sie hat also ein Supremum, x. Wir zeigen mit Hilfe von Lemma 1.27, dass $x^2 = a$ ist.

1. Schritt: Wir zeigen, dass $x^2 < a + \delta$ für jedes $\delta > 0$. Sei ein beliebiges $\delta > 0$ vorgelegt. Zu jedem $0 < \varepsilon \leq 1$ existiert nach der Definition des Supremums ein $r \in M$ mit $r > x - \varepsilon$. Also ist

$x < r + \varepsilon$. Weil $r^2 \leq a$ und C eine obere Schranke ist, folgt

$$x^2 < (r+\varepsilon)^2 = r^2 + 2\varepsilon r + \varepsilon^2 \overset{r^2 \leq a, r \leq C}{\leq} a + 2C\varepsilon + \varepsilon^2 \overset{\varepsilon \leq 1}{\leq} a + \varepsilon(2C+1). \tag{1}$$

Wählen wir also $\varepsilon < \min\{1, \delta/(2C+1)\}$, so ist $x^2 < a + \delta$. Mit Lemma 1.27 schließen wir, dass

$$x^2 \leq a.$$

2. Schritt: Wir zeigen, dass $x^2 \geq a$. Angenommen: $x^2 < a$. Setze $\delta = a - x^2$. Wie in Schritt 1 (Gleichung (1) jetzt mit x in der Rolle von r) sieht man, dass

$$(x+\varepsilon)^2 < x^2 + \delta = a,$$

falls ε hinreichend klein ist. Also ist $x + \varepsilon \in M$, und x ist nicht das Supremum. Widerspruch.
Aus Schritt 1 und Schritt 2 schließen wir, dass $x^2 = a$. $\triangleleft$

1.29. Bemerkung. Mit etwas mehr Arbeit kann man genauso die Existenz der n-ten Wurzel $a^{1/n}$ bzw. $\sqrt[n]{a}$ aus jeder positiven reellen Zahl a zeigen.

1.30. Folgerungen.

(a) $\mathbb{R}$ ist (bedeutend) größer als $\mathbb{Q}$. In $\mathbb{Q}$ gilt das Supremumsaxiom nicht (sonst könnten wir schließen wie oben).

(b) Für rationales $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}_+$ können wir

$$a^r = (a^p)^{1/q}$$

definieren.

Es gilt $a^r = (a^{1/q})^p$ und $a^r a^s = a^{r+s}$ mit $r, s \in \mathbb{Q}$.

Beweis. (b) Durch vollständige Induktion.