Funktionentheorie

Vorlesung im Sommersemester 2021

Elmar Schrohe
Institut für Analysis
Leibniz Universität Hannover
Welfengarten 1
30167 Hannover

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen 4
2. Holomorphe Funktionen 6
3. Die Cauchy-Formel. Sätze von Morera und Liouville 15
4. Identitätssatz und Klassifikation isolierter Singularitäten 19
Identitätssatz 19
Isolierte Singularitäten 20
5. Der Satz von der offenen Abbildung. Maximumprinzip 25
Die lokale Struktur holomorpher Funktionen 25
Maximumsprinzipien 27
6. Globale Versionen des Cauchyschen Integralsatzes. Residuensatz 28
Homotopie und Homologie 28
Meromorphie und Residuensatz 32
Gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Mengen 35
7. Einfach zusammenhängende Gebiete 38
8. Der Satz von Montel und der Riemannsche Abbildungssatz 41
Eine Metrik für $C(U)$ 41
Die Sätze von Arzelà-Ascoli und Montel 42
Der Riemannsche Abbildungssatz 44
9. Die Sätze von Runge und Mittag-Leffler: Der Weierstraßsche Produktsatz 49
Der Approximationssatz von Runge 49
Allgemeine Form des Satzes von Mittag-Leffler 52
Der Weierstraßsche Produktsatz 53
10. Das Dirichlet-Problem 58
Harmonische Funktionen 58
Das Dirichlet-Problem 61
Einfach zusammenhängende beschränkte Gebiete 65
Die Formeln von Poisson-Jensen und Jensen 65
Konvergenz harmonischer Funktionen 67
Subharmonische Funktionen 70
Perronscher Ansatz zur Lösung des Dirichlet-Problems 72
11. Iteration von Polynomen 77
Die Julia-Menge 77
Die Mandelbrotmenge 83

Literatur 91

1. Grundlagen

1.1. Topologische Räume.

(a) Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{O}$ eine Familie von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:
   (i) $X \in \mathcal{O}$, $\emptyset \in \mathcal{O}$;
   (ii) Ist $U_i \in \mathcal{O}$ für $i \in I$, so ist auch $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$;
   (iii) Ist $U_i \in \mathcal{O}$ für $i = 1, \ldots, m$, so ist $\bigcap_{i=1}^{m} U_i \in \mathcal{O}$.
   Dann heißt $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum; die Elemente von $\mathcal{O}$ nennt man die offenen (Teil-)mengen von X und $\mathcal{O}$ die Topologie von X.

(b) Eine Teilmenge eins topologischen Raums X heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement offen ist.

(c) Eine (offene) Umgebung eines Punkts $x \in X$ ist eine offene Menge, die x enthält.

(d) X heißt unzusammenhängend, falls offene Mengen $U, V \neq \emptyset$ existieren mit $X = U \cup V$ und $U \cap V = \emptyset$. Anderenfalls heißt X zusammenhängend.

(e) X, Y seien topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig, falls das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

(f) X heißt wegzusammenhängend, falls es zu $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to X$ gibt mit $\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$.

1.2. Bemerkung. Die Axiome sind gerade so gemacht, dass sie die Eigenschaften der offenen Mengen in einem metrischen/normierten Raum haben. Wir brauchen im Folgenden nur den Begriff 'zusammenhängend'.

1.3. Lemma. *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\emptyset \neq M \subseteq X$. Setzt man $\mathcal{O}_M = \{M \cap U : U \in \mathcal{O}\}$, so ist $(M, \mathcal{O}_M)$ ebenfalls ein topologischer Raum.*

Beweis. Klar. ◁

1.4. Lemma. *Es ist äquivalent*

(1) *X ist zusammenhängend;*

(2) *Ist $\emptyset \neq A \subseteq X$ offen und abgeschlossen, so ist $A = X$.*

(3) *Ist $f : X \to \mathbb{C}$ lokal konstant, so ist f konstant. (Eine Funktion f auf X heißt lokal konstant, falls zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U existiert mit $f(x) = f(u)$ für alle $u \in U$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Schreibe $X = A \dot\cup (X \setminus A)$. (Zerlegung in offene Mengen!)

(2) $\Rightarrow$ (3): f ist stetig, da lokal konstant. Für jedes $x \in X$ ist $f^{-1}(f(x))$ abgeschlossen (da $f(x)$ als einzelner Punkt in $\mathbb{C}$ abgeschlossen ist) und $\neq \emptyset$.

Ferner ist $f^{-1}(f(x))$ auch offen, da f lokal konstant ist. Nach Annahme ist daher $f^{-1}(f(x)) = X$, somit ist f konstant.

(3) $\Rightarrow$ (1): Es seien $U, V \subseteq X$ offen und $X = U \dot\cup V$. Betrachte die charakteristische Funktion χ_U von U. Sie ist lokal konstant, also nach Annahme konstant. Somit ist $V = \emptyset$. ◁

1.5. Lemma. *Es seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so auch $f(X)$.*

Beweis. Angenommen, es gibt offene Mengen U, V mit $f(X) = U \dot\cup V$. Dann ist

$$X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(U \dot\cup V) = f^{-1}(U) \dot\cup f^{-1}(V).$$

Da X zusammenhängt, ist eine der beiden Mengen leer. ◁

1.6. Lemma. *Die zusammenhängenden Mengen in $\mathbb{R}$ sind die Intervalle.*

Beweis. Man überlegt sich zunächst, dass $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, wenn aus $c, d \in I$, $c < d$ folgt, dass $]c, d[\subseteq I$:

Es sei I eine Menge mit dieser Eigenschaft. Setze $l = \inf I$, $r = \sup I$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Ist $l = r$, so ist $I = \emptyset$ oder $I = [l, l]$ ein Intervall. Ansonsten gibt es nach Definition von inf und sup zu hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ Elemente $c_\varepsilon < d_\varepsilon \in I$ mit $c_\varepsilon < l + \varepsilon$, $d_\varepsilon > r - \varepsilon$, so dass $]c_\varepsilon, d_\varepsilon[\subseteq I$. Es folgt, dass $]l, r[= \bigcup_\varepsilon]c_\varepsilon, d_\varepsilon[\subseteq I$ und somit $I \in \{]l, r[, [l, r[,]l, r], [l, r]\}$, je nachdem, ob das Infimum bzw. Supremum zu I gehört oder nicht.

'$\Rightarrow$' Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ kein Intervall, so finden wir $c < d \in I$ und $a \in]c, d] \setminus I$. Dann ist $I = (I \cap]-\infty, a[) \dot\cup (I \cap]a, \infty[)$ nicht zusammenhängend.

'$\Leftarrow$' Es sei I ein Intervall und $I = U \dot\cup V$ mit offenen, disjunkten Teilmengen U und V von I. Wähle $u \in U$. Dann existiert ein offenes Intervall um u, das in U enthalten ist. Wähle $l < u$ minimal und $r > u$ maximal, so dass $]l, r[\subseteq U$. Dann sind l und r nicht in V, denn dann gäbe es offene Intervalle um l bzw. r, die in V enthalten sind. Diese hätten aber nichtleeren Schnitt mit $]l, r[\subseteq U$. Widerspruch. Also sind l und r Randpunkte von I, so dass $I \in \{]l, r[, [l, r[,]l, r], [l, r]\}$ und $V = \emptyset$. ◁

1.7. Lemma. *Ist X wegzusammenhängend, so ist X zusammenhängend.*

Achtung *Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch; s. aber 1.8.*

Beweis. Annahme, X ist nicht zusammenhängend; $X = U \dot\cup V$. Wähle $x \in U$, $y \in V$. Dann existiert ein stetiger Weg $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Als Bild der zusammenhängenden Menge $[0, 1]$ ist $\gamma([0, 1])$ zusammenhängend im Widerspruch dazu, dass wir schreiben können

$$\gamma([0, 1]) = (\gamma([0, 1]) \cap U) \dot\cup (\gamma([0, 1]) \cap V).$$

◁

1.8. Satz. *In $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ ist jede zusammenhängende offene Menge auch wegzusammenhängend.*

Beweis. Es sei $X \neq \emptyset$ offen und zusammenhängend. Wähle $a \in X$ beliebig. Setze

$$X_a = \{x \in X : \exists \gamma \in C([0, 1], X) \text{ mit } \gamma(0) = a, \gamma(1) = x\}.$$

Dann ist X_a offen, da X offen ist. X_a ist auch abgeschlossen: Ist $x \in X$ so, dass jede offene Umgebung von x die Menge X_a schneidet, so gibt es einen stetigen Weg nach X: Man wählt dazu etwa einen kleinen Kreis um x der in X enthalten ist (X offen). ◁

1.9. Definition. Eine Teilmenge Z von X heißt Zusammenhangskomponente, falls gilt

- Z ist zusammenhängend.
- Z ist maximal bezüglich dieser Eigenschaft, d. h. ist $Z \subseteq Z'$, Z' zusammenhängend, so ist $Z = Z'$.

1.10. Lemma. *X sei topologischer Raum.*

(a) *Zu jedem $x \in X$ gibt es genau eine Zusammenhangskomponente Z mit $x \in Z$.*

(b) *Zu jedem zusammenhängenden $M \subseteq X$ gibt es genau eine Zusammenhangskomponente Z mit $M \subseteq Z$.*

(c) *Jede Zusammenhangskomponente ist abgeschlossen.*

Beweis. Selbst probieren. ◁

2. Holomorphe Funktionen

2.1. Definition. Ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist eine offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Im folgenden sei Ω stets ein Gebiet in $\mathbb{C}$.

2.2. Definition. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt (komplex) differenzierbar in $z_0 \in \Omega$, falls

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Ist f auf ganz Ω differenzierbar, so nennt man f holomorph (oder analytisch) auf Ω und schreibt

$$f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Beachte: f' ist wieder eine Funktion von Ω nach $\mathbb{C}$.

2.3. Lemma.

(a) *Sind f, g differenzierbar in z_0, so auch $f + g, f \cdot g$ und $1/g$ (falls $g(z_0) \neq 0$); es gelten die üblichen Rechenregeln.*

(b) *Die Komposition holomorpher Funktionen ist holomorph; es gilt die Kettenregel*

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

Beweis. Wie im Reellen.

2.4. Beispiele.

(a) Polynome sind holomorph in $\mathbb{C}$.

(b) $1/z^k$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$.

(c) $\exp, \sin, \cos$ sind holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $\exp' = \exp, \sin' = \cos, \cos' = -\sin$ mit der gleichen Rechnung wie im reellen Fall (s. auch 2.9 unten).

2.5. Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit – Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung. Schreibe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ als

$$f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$$

mit reellwertigen Funktionen u und v. Wir identifizieren f mit der Ableitung

$$F : \Omega_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \Omega_{\mathbb{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \Omega\}$$

definiert durch

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} U(x, y) &= u(x + iy) \\ V(x, y) &= v(x + iy). \end{aligned}$$

Dann gilt: f ist komplex differenzierbar im Punkt $x + iy \Leftrightarrow F$ ist total differenzierbar im Punkt (x, y), und es gelten die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_x U(x, y) &= \partial_y V(x, y) \\ \partial_y U(x, y) &= -\partial_x V(x, y) \end{aligned}$$

(Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen); kurz: $U_x = V_y,\ U_y = -V_x$.

Beweis: f ist komplex differenzierbar in $z = x + iy$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(z + h) - f(z)}{h} - f'(z) =: \varphi(z, h) \to 0 \quad \text{für} \quad h \to 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f(z + h) = f(z) + hf'(z) + h\varphi(z, h) \tag{1}$$

mit $\varphi(z, h) \to 0$ für $h \to 0$. Schreibe $f'(z) =: c \in \mathbb{C},\ c = c_1 + ic_2$.

Dann gilt

$$f'(z)h = (c_1 + ic_2)(h_1 + ih_2) = c_1h_1 - c_2h_2 + i(c_2h_1 + c_1h_2),$$

wir identifizieren dies mit dem Element von $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} c_1h_1 - c_2h_2 \\ c_2h_1 + c_1h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Das heißt: Die komplexe Multiplikation mit $c = c_1 + ic_2$ ist äquivalent zu der linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$, die durch die Matrix $\begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Die Beziehung (1) ist also äquivalent zu

$$F(x + h_1, y + h_2) = F(x, y) + \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \psi(x, y, h)$$

mit $\psi(x, y, h) = o(\|h\|)$.

Dies wiederum heißt gerade, dass F in (x, y) total differenzierbar ist mit

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{pmatrix}.$$

2.6. Bemerkung. Hinreichend für totale Differenzierbarkeit von F ist bekanntlich, dass F stetig partiell differenzierbar ist. Zum Nachweis der komplexen Differenzierbarkeit genügt es also, dies und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zu überprüfen.

2.7. Der $\overline{\partial}$-Operator. Wegen $z = x + iy$ haben wir

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = -i\frac{z - \overline{z}}{2}.$$

Wir betrachten z und $\overline{z}$ als neue Variablen. Es sei $F = F(x, y) : \Omega_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ total reell differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Schreiben wir $F = u + iv$, so ist

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y},$$

und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind äquivalent dazu, dass

$$\overline{\partial} F := \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = 0.$$

2.8. Potenzreihen.

(a) Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ existiert der Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$; er hat die Eigenschaft, dass die Reihe auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B(a, r)}$ mit $r < R$ gleichmäßig konvergiert, während sie auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B(a, R)}$ divergiert. Es gilt

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

(b) Wir sagen, die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sei durch Potenzreihen dargestellt, falls zu jeder Kreisscheibe $B(a, r) \subseteq \Omega$ eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ existiert, die für alle $z \in B(a, r)$ gegen $f(z)$ konvergiert.

2.9. Satz. *$f : \Omega \to \mathbb{C}$ sei durch Potenzreihen dargestellt. Dann ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und f' ist ebenfalls durch Potenzreihe dargestellt. Es gilt: Ist*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in B(a,r),$$

so ist

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

Diese Reihe hat gleichen Konvergenzradius wie die obige.

Beweis: Setze $g(z) = \sum n c_n (z-a)^{n-1}$, wähle $w \in B(a,r)$ und ρ mit $|w-a| < \rho < r$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a = 0$.

Dann gilt

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{z^n - w^n}{z-w} - n w^{n-1} \right).$$

Der Ausdruck in Klammern ist Null für $n = 1$ und (vollständige Induktion) gleich

$$(z-w) \sum_{k=1}^{n-1} k w^{k-1} z^{n-k-1}$$

für $n \geq 2$ (ausmultiplizieren und verwenden, dass $(z-w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \ldots + w^{n-1}) = z^n - w^n$). Da alle Exponenten ≥ 0 sind, ist für $|w|, |z| < \rho$ der Betrag der *Summe* höchstens

$$\frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2},$$

also ist

$$\left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) \right| \leq |z-w| \sum_{n=2}^{\infty} n^2 c_n \rho^{n-2}.$$

Die Reihe konvergiert, weil $\rho < r$. Daher geht die linke Seite für $z \to w$ gegen Null. Folglich ist $f'(w) = g(w)$. ◁

2.10. Folgerung. Der Satz läßt sich wiederum auf f' anwenden. Also ist f beliebig oft differenzierbar, jede Ableitung ist durch Potenzreihen darstellbar, und

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) c_n (z-a)^{n-k}.$$

Es gilt $f^{(k)}(a) = k!\, c_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ Die Potenzreihendarstellung ist also eindeutig.

2.11. Erinnerung. Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar. Die Abbildung γ (manchmal auch das Bild $\Gamma = \gamma([a,b])$ nennt man dann einen Weg in $\mathbb{C}$; der Weg heißt geschlossen, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Ferner sei $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ stetig. Wir setzen dann

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t)\, dt.$$

Ist $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar mit $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$, so ist für $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$

$$\int_c^d f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t)\, dt = \int_c^d f \circ \gamma \circ \varphi(t) \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t)\, dt = \int_a^b f \circ \gamma(t) \gamma'(t)\, dt,$$

d. h. das Integral ist unabhängig von der Parametrisierung von Γ, solange die Orientierung erhalten bleibt. Kehrt φ die Orientierung um, d. h., ist $\varphi(c) = b, \varphi(d) = a$, so ist

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = -\int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Man nennt dann γ_1 den entgegengesetzten Weg. Sind γ_1, γ_2 zwei Wege, und ist der Endpunkt von γ_1 gleich dem Ausgangspunkt von γ_2, so setzt man für den vereinigten Weg γ

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz,$$

falls f stetig auf $\operatorname{Bild}\gamma_1 \cup \operatorname{Bild}\gamma_2$. Es gilt die Ungleichung

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| \leq \|f\|_{\sup} \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Das letzte Integral nennt man die Länge von γ. Diese Definition stimmt mit der aus dem ersten Semester überein, wenn man γ als Kurve in $\mathbb{R}^2$ interpretiert.

2.12. Spezialfälle.

(a) Es sei $a \in \mathbb{C}, r > 0$. Der durch

$$\gamma(t) = a + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

definierte Weg heißt die positiv orientierte Kreislinie um a mit Radius r; es gilt

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = ir \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta.$$

Die Länge von γ ist $2\pi r$.

(b) Sind $a, b \in \mathbb{C}$, so heißt der durch

$$\gamma(t) = a + (b-a)t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

definierte Weg die Verbindungsstrecke von a und b. Schreibe $[a, b]$. Seine Länge ist $|b - a|$ und

$$\int_{[a,b]} f(z)\,dz = (b-a)\int_0^1 f(a + (b-a)t)\,dt.$$

Ist

$$\gamma_1(t) = \frac{a(\beta - t) + b(t - \alpha)}{\beta - \alpha}, \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

so erhalten wir einen äquivalenten Weg. Der entgegengesetzte Weg zu $[a, b]$ ist $[b, a]$.

(c) Es sei $\{a, b, c\}$ ein geordnetes Tripel komplexer Zahlen. Es sei $\triangle = \triangle(a, b, c)$ das zugehörige Dreieck (formal: $\triangle$ ist kleinste konvexe Menge, die a, b und c enthält. Eine Menge heißt konvex, falls sie mit je zwei Punkten x und y auch deren Verbindungsstrecke enthält.). Ist f auf $\partial\triangle$ stetig, so setzen wir

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \int_{[a,b]} f(z)\,dz + \int_{[b,c]} f(z)\,dz + \int_{[c,a]} f(z)\,dz.$$

Vertauscht man a, b, c zyklisch, so ändert sich das Integral nicht.

2.13. Satz. *Es sei γ ein Weg in $\mathbb{C}$ mit Bild $\gamma = \Gamma$ und $g : \Gamma \to \mathbb{C}$ stetig. Wir setzen*

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{w - z}\,dw, \quad z \notin \Gamma.$$

Dann ist f auf $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ in Potenzreihen entwickelbar, also holomorph.

Beweis: Es sei $B(a,r) \subseteq \Omega$. Dann ist für $z \in B(a,r)$ und $w \in \Gamma$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{(w-a)(1-\frac{z-a}{w-a})} = \frac{1}{w-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^k.$$

Die Summe konvergiert, da $|z-a| < r \leq |w-a|$. Also ist

$$\frac{g(w)}{w-z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{g(w)}{(w-a)^{k+1}}(z-a)^k.$$

Auf jeder Scheibe $B(a,\rho), \rho < r$ konvergiert die Reihe gleichmäßig nach dem Weierstraß-Kriterium, da

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{g(w)}{w-a}\right|\left|\frac{z-a}{w-a}\right|^k \leq \frac{\sup|g|}{r}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^k < \infty.$$

Es folgt

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(w)}{w-z}\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k,$$

wobei

$$c_k = \int_\gamma \frac{g(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw.$$

2.14. Satz. *Es sei γ geschlossener Weg. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathit{Bild}\ \gamma =: \Omega$ setze*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}. \tag{1}$$

Dann ist Ind_γ eine $\mathbb{Z}$-wertige Funktion auf Ω, die auf jeder Zusammenhangskomponente konstant ist; sie ist Null auf der unbeschränkten Komponente von Ω. Man nennt $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ die Windungszahl von z bezüglich γ.

Beweis: Für $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}, z \in \Omega$ ist

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt.$$

Nun ist $w/2\pi i \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow e^w = 1$. Die Funktion Ind ist daher $\mathbb{Z}$-wertig, falls $\varphi(b) = 1$ ist, wobei

$$\varphi(s) = \exp\left(\int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt\right), \quad a \leq s \leq b.$$

Ableiten zeigt, dass

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} \tag{2}$$

für alle t, an denen γ differenzierbar ist.

Die Funktion φ ist stetig, ebenso $\gamma - z$. Da $\gamma - z$ keine Nullstelle hat, ist $\varphi/(\gamma - z)$ ebenfalls stetig. Ferner ist

$$\left(\frac{\varphi}{\gamma-z}\right)' = \frac{\varphi'(\gamma-z)-\gamma'\varphi}{(\gamma-z)^2} \overset{(2)}{=} 0,$$

abgesehen von der endlichen Menge von Punkten, an denen γ nicht differenzierbar ist. Folglich ist $\varphi/(\gamma - z)$ konstant. Wegen $\varphi(a) = 1$ ergibt sich

$$\varphi(t) = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(a)-z}, \quad a \leq t \leq b.$$

Nun ist γ geschlossen, folglich $\gamma(b) = \gamma(a)$ und somit $\varphi(b) = 1$. Dies zeigt, dass $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

Nach Satz 2.12 ist Ind_γ holomorph. Das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung ist zusammenhängend nach Lemma 1.5. Die einzigen zusamennhängenden Mengen in $\mathbb{Z}$ sind jedoch einzelne Punkte. Daher ist Ind_γ auf jeder Zusammenhangskomponente konstant.

Bild γ ist als stetiges Bild des kompakten Intervalls $[a,b]$ kompakt, also existiert $R>0$ mit Bild $\gamma \subseteq B(0,R)$. Da $\mathbb{C}\setminus B(0,R)$ zusammenhängend ist, liegt es in einer Zusammenhangskomponente von Ω. Daher hat Ω genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente. Da aus (1) folgt, dass $\mathrm{Ind}_\gamma(z)\to 0$ für $z\to\infty$ (dominierte Konvergenz) ist die Windungszahl dort Null. $\lhd$

2.15. Der Logarithmus. Die Exponentialfunktion ist holomorph auf $\mathbb{C}$. Ihr Bild ist bekanntlich $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Wir wissen auch, dass

$$\exp(z+2\pi i) = \exp(z)$$

ist. Daher ist exp nicht injektiv. Auf dem Streifen

$$S = \{x+iy : x,y\in\mathbb{R}, -\pi < y \le \pi\}$$

ist exp jedoch injektiv (denn $\exp w = \exp z \Leftrightarrow w - z \in \{2k\pi i : k\in\mathbb{Z}\}$); das Bild des Streifens unter exp ist $\mathbb{C}^*$. Also existiert eine Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{C}^* \to S$ mit $\exp\circ\ln = id$ und $\ln\circ\exp = id$.

Aber: Diese Umkehrfunktion ist nicht stetig. Es ist $\exp(i\pi) = -1$, also $\ln(-1) = i\pi$, für $-\pi < y_n < \pi$ mit $y_n \to -\pi$ gilt $\exp(iy_n)\to -1$, aber

$$\ln(\exp(y_n)) = iy_n \to -i\pi \neq i\pi = \ln(-1).$$

Wählen wir hingegen:

$$S_0 = \{x+iy : x,y\in\mathbb{R}, -\pi < y < \pi\},$$

so ist $\exp(S_0) = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\le 0}$ injektiv, und die Umkehrfunktion $\ln|_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\le 0}}$ ist stetig, sogar differenzierbar mit $\ln' z = 1/z$. Mehr dazu in 2.17 unten.

2.16. Definition. Es sei $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ein Gebiet.

(a) Eine stetige Funktion $f:\ \Omega\to\mathbb{C}$ mit $\exp(f(z)) = z$ heißt stetiger Zweig des Logarithmus auf Ω.

(b) Allgemeiner: Ist $M\subseteq\mathbb{C}$ und $g: M\to\mathbb{C}$ stetig, so nennt man eine stetige Funktion $f: M\to\mathbb{C}$ mit $\exp(f(z)) = g(z)$ einen stetigen Logarithmus für g.

Die Funktion $\mathrm{Im}\, f : M\to\mathbb{R}$ heißt dann Argumentfunktion zu g. Es gilt:

$$g(z) = |g(z)|\exp(i\mathrm{Im}\, f(z)).$$

2.17. Satz.

(a) *Die Funktion*

$$\ln|_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\le 0}} : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\le 0} \to \{x+iy : x,y\in\mathbb{R}, -\pi < y < \pi\}$$

aus (2.15) *ist ein stetiger Zweig des Logarithmus, der sog. Hauptzweig.*

(b) *Ist Ω zusammenhängend, so unterscheiden sich je zwei stetige Logarithmusfunktionen um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π.*

(c) *Jeder stetige Zweig f des Logarithmus auf einem Gebiet $\Omega\subseteq\mathbb{C}^*$ ist holomorph, und es gilt*

$$f'(z) = \frac{1}{z}.$$

Beweis. (a) Stetigkeit: Ist $z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $|\varphi| < \pi$, so ist der Hauptzweig des Logarithmus gegeben durch $\ln z = \ln r + i\varphi$. Nun kann man r und φ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig in Abhängigkeit von x und y wählen ($r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$ für $x > 0$ (weitere Fälle analog)). Daher ist ln stetig.

(b) Es seien f, g stetige Zweige. Setze

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}(f(z) - g(z).$$

Dann ist

$$\exp(2\pi i h(z)) = \exp(f(z) - g(z)) = 1,$$

also ist $h(z) \in \mathbb{Z}$ für jedes $z \in \Omega$, somit auch $h(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$. Da Ω zusammenhängt, ist h konstant.

(c) Satz über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion: Ist (z_k) eine Folge in Ω mit $z_k \to z \in \Omega$, so gilt wegen der Stetigkeit $y_k := \ln z_k \to \ln z =: y$, folglich

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln z_k - \ln z}{z_k - z} = \lim \frac{y_k - y}{\exp y_k - \exp y} = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{z}.$$

◁

2.18. Satz. *Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}^*$ stetig, so existiert eine stetige Funktion f mit $\exp(f(t)) = \gamma(t)$. Ist γ sogar stückweise stetig differenzierbar, so auch f.*

Beweis. (Kreiskettenverfahren). Die Menge $\gamma([a, b])$ ist kompakt. Setze $r = \min\{|\gamma(t)| : a \leq t \leq b\}$. Dann ist $r > 0$. Wähle eine Partition

$$a = t_0 < t_1 < \ldots t_N = b$$

von $[a, b]$ der Feinheit δ, wobei δ so gewählt ist, dass aus $|s - t| < \delta$ folgt $|\gamma(s) - \gamma(t)| < r/2$. Dann ist

$$\bigcup_{j=0}^{N} B(t_j, r) \supseteq \gamma([a, b])$$

und

$$\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subseteq B(\gamma(t_k), r) \cap B(\gamma(t_{k+1}, r).$$

Ferner ist $0 \notin B(t_j, r)$ für alle j nach Wahl von r.

Wir machen nun folgende Beobachtung: Ist $a \in \mathbb{C}^*$, so existiert auf $B(a, |a|)$ ein stetiger Zweig des Logarithmus, denn für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ können wir den Hauptzweig des Logarithmus wählen, und für allgemeines $a = |a|e^{i\varphi}$ können wir $\ln(z) = \ln(ze^{-i\varphi}) + i\varphi$ definieren, wobei rechts der Hauptzweig stehen soll.

Also existiert ein $f_0 : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ mit

$$\exp(f_0(t)) = \gamma(t); \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Klar: Da $f_0 = \ln \circ \gamma$ ist, ist mit γ auch f_0 stetig/stückweise stetig differenzierbar. Anschließend finden wir ein $g_1 : [t_1, t_2] \to \mathbb{C}$ mit

$$\exp(g_1(t)) = \gamma(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

Dabei existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $g_1(t_1) = f_0(t_1) + 2\pi ik$. Wir definierten dann $f_1 : [t_1, t_2] \to \mathbb{C}$ durch $f_1 t) = g_1(t) - 2\pi ik$ und haben dadurch die gesuchte Funktion auf $[t_0, t_2]$. Nach N Schritten sind wir fertig. ◁

2.19. Folgerung. *Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Kurve und $z \notin \Gamma = Bild\gamma$, so ist $\delta = \gamma - z$ eine Kurve in $\mathbb{C}^*$. Wir finden also eine stückweise stetig differenzierbare Funktion f mit $\exp(f(t)) = \delta(t)$. Dann ist*

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \int_a^b \frac{(\delta(t)+z)'}{(\delta(t)+z)-z}\,dt = \int_a^b \frac{\exp(f(t))f'(t)}{\exp(f(t))}\,dt = \int_a^b f'(t)\,dt = f(b)-f(a).$$

Insbesondere ist also der Imaginärteil des Integrals der Zuwachs des Imaginärteils von f entlang der Kurve somit der Zuwachs des Arguments von δ entlang der Kurve. Ist die Kurve geschlossen, so ist dies ein Vielfaches von 2π, und wir erhalten die Interpretation von $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ als Windungszahl von γ um z.

2.20. Lemma. *Ist γ die positiv orientierte Kreislinie um a mit Radius r, so ist*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & |z-a| < r \\ 0 & |z-a| > r \end{cases}.$$

Beweis: Wähle $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Dann folgt aus 2.14, dass $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ für $|z-a| > r$ und $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(a)$ für $|z-a| < r$. Wir sehen:

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{a+re^{it}-a}\,dt = 1.$$

2.21. Hilfssatz. Es sei $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ und F' stetig (wir sehen später: dies ist automatisch erfüllt). Dann ist für jeden geschlossenen Weg γ

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = 0.$$

Beweis. $\int_\gamma F'(z)\,dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$, da $\gamma(b) = \gamma(a)$. ◁

2.22. Folgerung. Es sei $n \in \mathbb{Z}$ und γ eine geschlossene Kurve . Für $n < 0$ sei zusätzlich $0 \notin \mathrm{Bild}\,\gamma$. Dann ist

$$\int_\gamma z^n\,dz = \begin{cases} 0; & n \neq -1 \\ 2\pi i\,\mathrm{Ind}_\gamma(0); & n = -1 \end{cases}.$$

Beweis. Für $n \neq -1$ ist $z^n = \left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)'$, und 2.21 liefert die Behauptung. Für $n = 1$ ist dies die Definition. ◁

2.23. Satz. *Es sei $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist äquivalent:*

(a) *f hat auf Ω eine holomorphe Stammfunktion F mit $F' = f$.*

(b) *Für jeden geschlossenen Weg γ in Ω ist $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

Beweis: Genau wie in Analysis 2, Thema Vektorfelder und Potentiale. Der Vollständigkeit halber:

(a) ⇒ (b) 2.21.

(b) ⇒ (a) Es sei Z eine Zusammenhangskomponente von Ω. Z ist offen und zusammenhängend, also wegzusammenhängend nach Satz 1.8. Wähle $a \in Z$ fest. Für beliebige $z \in Z$ wähle einen Weg γ_z von a nach z und setze

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,dw.$$

Da das Integral von f über geschlossene Wege Null ist, hängt F nicht von der Wahl des Weges ab.

Zeige: F ist differenzierbar. Fixiere $z_0 \in Z$. Nahe z_0 kann man $\gamma_z = \gamma_{z_0} + [z_0, z_0]$ wählen. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} f(z)\, dz \\
&= \frac{1}{z - z_0} \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\, dt\, (z - z_0) \\
&= \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\, dt \\
&\overset{z - z_0 \to 0}{\to} f(z_0)
\end{aligned}$$

mit dominierter Konvergenz. ◁

3. Die Cauchy-Formel. Sätze von Morera und Liouville

3.1. Lemma von Goursat. *Es sei $\triangle$ ein abgeschlossenenes Dreieck in Ω, $p \in \Omega$, f stetig auf Ω und holomorph auf $\Omega \setminus \{p\}$. Dann ist*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0.$$

Bemerkung: Ist f holomorph auf $\Omega \setminus \{p\}$ und außerdem stetig, so ist$f$ holomorph auf ganz Ω. Dies werden wir jedoch erst später beweisen können.

Der Beweis benutzt das folgende Lemma:

3.2. Lemma. *Es sei $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ eine Folge abgeschlossener nichtleerer Mengen vom Durchmesser $d_1, d_2, \ldots \to 0$ in $\mathbb{C}$. Dann existiert genau ein Punkt in $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$.*

Dies ist bekannt aus Analysis 1. Hier sind die Details:

Beachte: Der Durchmesser einer Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{C}^n$ oder Banachraum) ist

$$\sup\{\|x-y\| : x, y \in M\}.$$

Beweis. Wähle $a_j \in A_j$. Dann ist $\{a_j\}$ eine Cauchy-Folge, weil für $k \geq k_0$ gilt

$$a_k, a_{k_0} \subseteq A_{k_0},$$

folglich $\|a_k - a_{k_0}\| \leq d_{k_0} \overset{k_0\to\infty}{\to} 0$. Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, hat die Folge einen Grenzwert a. Für festes k_0 ist $a_{k_0}, a_{k_0+1}, \ldots$ eine Folge in A_{k_0} mit Grenzwert a. Da A_{k_0} nach Voraussetzung abgeschlossen ist, folgt $a \in A_{k_0} \Rightarrow a \in \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$.

Ist auch $b \in \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$, so folgt $a, b \in A_j \,\forall\, j \Rightarrow \|a-b\| \leq d_j \,\forall\, j \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow b = a$.

Beweis von 3.2. Fall I: $p \notin \triangle$. Wir können die Behauptung in diesem Fall direkt aus dem Satz von Gauß ableiten. Hier ist der klassische Beweis:

Seien a, b, c die Eckpunkte und a', b', c' die Mittelpunkte von $[b, c]$ bzw. $[c, a]$ bzw. $[a, b]$. Wir betrachten nun die vier Dreiecke $\triangle^1, \triangle^2, \triangle^3, \triangle^4$, die durch die Tripel

$$\{a, c', b'\},\ \{b, a', c'\},\ \{c, a', b'\},\ \text{und}\ \{a', b', c'\}$$

gebildet werden. Es sei $J = \int_{\partial\triangle} f(z)\,dz$. Nach Definition der Wegsumme ist

$$J = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\triangle^j} f(z)\,dz.$$

Damit ist $|\int_{\partial\triangle^j} f(z)\,dz| \geq \frac{1}{4}|J|$ für ein j. Wir nennen dieses Dreieck $\triangle^j$ nun $\triangle_1$ und verfahren analog. Diese liefert eine Folge $\triangle_1, \triangle_2, \ldots$ von ineinander liegenden nicht leeren Dreiecken. Die Seitenlängen sind $L/2,\ L/4, \ldots$, wobei L die Seitenlänge von $\triangle$ war. Es ist

$$|J| \leq 4^n \left| \int_{\partial\triangle_n} f(z)\,dz \right|, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Es gibt nun nach dem vorhergehenden Lemma genau ein $z_0 \in \bigcap \triangle_n$. Da $\triangle$ kompakt ist, liegt z_0 in $\triangle$. Folglich ist f differenzierbar in z_0.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $r > 0$ mit

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon|z - z_0|$$

für $|z-z_0|<r$. Ist n hinreichend groß, so ist $|z-z_0|<r$ für alle $z\in\triangle_n$. Für dieses feste n gilt auch $|z-z_0|\le 2^{-n}L$. Weil $f(z_0)$ und $f'(z_0)(z-z_0)$ Ableitungen holomorpher Funktionen sind, folgt aus Satz 2.23, dass ihr Integral über geschlossene Wege Null ist und somit

$$\int_{\partial\triangle_n} f(z)\,dz = \int_{\partial\triangle_n} f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)\,dz,$$

so dass

$$|\int_{\partial\triangle_n} f(z)\,dz| \le \varepsilon(2^{-n}L)(2^{-n}L). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) schließen wir, dass $|J|\le\varepsilon L^2$. Da ε beliebig war, schließen wir, dass $|J|=0$.

Fall II. p ist einer der Eckpunkte etwa $p=a$. Liegen a,b,c auf einer Geraden, so ist nichts zu zeigen. Anderenfalls wählen wir Punkte $x\in[a,b]$, $y\in[c,a]$ beide nahe an a. Das Integral ist die Summe der Integrale über die Ränder der Dreiecke $\triangle(a,x,y)$, $\triangle(x,b,y)$ und $\triangle(b,c,y)$.

Wegen Fall I ergibt sich bei den letzten beiden Null. Folglich ist

$$J=\left(\int_{[a,x]}+\int_{[x,y]}+\int_{[y,a]}\right) f(z)\,dz$$

und somit

$$|J|\le\|f\|_{\sup}\,(|a-x|+|x-y|+|y-a|).$$

Die rechte Seite kann beliebig klein gemacht werden, indem man x,y nahe bei a wählt. Wieder folgt $J=0$.

Fall III. Ist schließlich p ein beliebiger Punkt von $\triangle$, so betrachte die Dreiecke $\triangle(a,b,p)$, $\triangle(b,c,p)$, $\triangle(c,a,p)$. Nach Fall II liefern die Integrale über jedes Teildreieck Null. Es folgt, dass $J=0$. $\lhd$

3.3. Satz. Der Satz von Cauchy in einer konvexen Menge. Es sei Ω offen und konvex (d. h. $\forall\, x,y\in\Omega$ ist $[x,y]\in\Omega$). Es sei f stetig auf Ω, $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus\{p\})$. Dann hat f eine Stammfunktion, d. h. $\exists\, F\in\mathcal{H}(\Omega)$ mit $F'=f$.

Insbesondere ist $\int_\gamma f(z)\,dz=0$ für jeden geschlossenen Weg γ in Ω nach 2.21.

Bemerkung. Die Konvexität ist hier wichtig: De Funktion $f(z)=1/z$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, aber das Integral über den Einheitskreis ist nach Definition $2\pi i$ mal die Windungszahl, also $2\pi i$.

Beweis: Für $z\in\Omega$ definiere

$$F(z)=\int_{[a,z]} f(w)\,dw,$$

wobei a fest gewählt sei. Ist z_0 weiterer Punkt in Ω, so liegt das Dreieck $\triangle(a,z,z_0)$ in Ω. Nach Goursat gilt dann

$$F(z)-F(z_0)=\int_{[z_0,z]} f(w)\,dw.$$

Es folgt für $z\neq z_0$

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)=\frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} f(w)-f(z_0)\,dw.$$

Ist $\varepsilon>0$ vorgelegt, so folgt aus der Stetigkeit von f in z, dass ein δ existiert so, dass

$$|f(w)-f(z_0)|<\varepsilon \text{ für } |w-z_0|<\delta.$$

Für $|z-z_0|<\delta$ ist der Betrag der rechten Seite also $\le\frac{1}{|z-z_0|}|z-z_0|\varepsilon=\varepsilon$. Daher ist F differenzierbar und $F'=f$. $\lhd$

3.4. Cauchy-Formel für konvexe Mengen. Es sei γ ein geschlossener Weg in einer konvexen offenen Menge Ω und $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Ist $z \in \Omega \setminus \operatorname{Bild}\gamma$, so ist

$$f(z)\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Bemerkungen.

(1) Interessantester Fall: $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 1$ (z. B. Kreislinie).

(2) Es folgt sofort

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!}\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw.$$

durch Differentiation unter dem Integral.

Beweis. Definiere

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \\ f'(z) \end{cases}.$$

Dann ist g stetig und holomorph auf $\Omega \setminus \{z\}$. Es folgt mit der Cauchyschen Integralformel

$$0 = \int_\gamma g(w)\,dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

und damit die Behauptung. ◁

3.5. Satz. (Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen). Ist Ω offen in $\mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, so ist f durch Potenzreihen darstellbar. Ausführlich: Für $a \in \Omega$ definiere

$$d_a = \begin{cases} \operatorname{dist}(a, \partial\Omega) & \Omega \neq \mathbb{C} \\ \infty & \Omega = \mathbb{C} \end{cases}.$$

Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad z \in B(a, d_a), \tag{1}$$

wobei

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{2}$$

dabei ist $\gamma(a,r)$ die positiv durchlaufene Kreislinie um a mit Radius $r < d_a$. Insbesondere ist

$$|c_k| \leq \frac{1}{r^k}\max\{|f(w)| : |w-a| = r\}. \tag{3}$$

Beweis. Es ist $B(a,d_a) \subseteq \Omega$. Da $B(a,d_a)$ konvex ist, gilt nach Satz 3.4 für $r < d_a$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw;$$

beachte, dass $\operatorname{Ind}_{\gamma(a,r)} = 1$ ist (vgl. 2.20).

Aus Satz 2.12 folgt, dass f auf $B(a,r)$ durch eine Potenzreihe darstellbar ist. Da die Koeffizienten eindeutig durch die Ableitungen von f in a bestimmt sind (2.10), hängen sie nicht von r ab. Es gilt also (1). Die Formel (2) folgt aus 2.10 und dem Beweis von 2.13; (3) folgt unmittelbar aus (2). ◁

3.6. Folgerung. Ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, so ist $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$ nach 3.5 in Verbindung mit 2.10; folglich ist f beliebig oft differenzierbar.

3.7. Satz. (Morera). Es sei f stetig auf Ω, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, und

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0 \tag{1}$$

für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle$ in Ω. Dann ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Beweis: Es sei $a \in \Omega$ und $B(a,r) \subseteq \Omega$. Wie im Beweis von 3.3 setze $F(z) = \int_{[a,z]} f(w)\,dw$ für $z \in B(a,r)$. Es folgt wie dort, dass F differenzierbar ist auf $B(a,r)$ mit Ableitung f (dazu wurde nämlich nur (1) benutzt).

Also ist $f = F'$ nach 3.6 ebenfalls auf $B(a,r)$ holomorph. Es folgt, dass f auf ganz Ω holomorph ist. $\lhd$

3.8. Definition. Die Elemente von $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ heißen ganze Funktionen.

Beispiele: Polynome, Exponentialfunktion, sin, cos und deren Komposition.

3.9. Satz. (Liouville). Ist $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ beschränkt, so ist f konstant.

Beweis: Nach 3.5 gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

wobei die Summe für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Es sei $C := \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\}$. Dann gilt nach 3.5(3)

$$|f^{(k)}(0)| \leq Ck!R^{-k}.$$

Da die linke Seite von R nicht abhängt, folgt $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k > 0$. Daher ist $f \equiv C$. $\lhd$

3.10. Folgerung. Fundamentalsatz der Algebra. Jedes nichtkonstante Polynom p hat eine Nullstelle. Mit linearer Algebra folgt hieraus: Jedes Polynom $\neq 0$ über $\mathbb{C}$ hat eine Darstellung

$$p(z) = C\prod_{j=1}^{n}(z - z_j),$$

wobei $z_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$, $0 \neq C \in \mathbb{C}$, $n = \operatorname{grad} p$.

Beweis: Ist p nichtkonstant, so ist

$$\lim_{z\to\infty} |p(z)| = \infty. \tag{1}$$

Hätte p keine Nullstelle, so wäre $\frac{1}{p}$ eine ganze Funktion. Aus (1) folgt, dass es ein $R > 0$ gibt mit

$$|p(z)| \geq 1 \quad \forall\, |z| \geq R.$$

Also ist $|\frac{1}{p(z)}| \leq 1 \,\forall\, |z| \geq R$. Auf der kompakten Menge $\{z : |z| \leq R\}$ ist $\frac{1}{p}$ beschränkt. Also ist $\frac{1}{p}$ beschränkt auf $\mathbb{C}$, nach Liouville somit konstant. Widerspruch! $\lhd$

4. Identitätssatz und Klassifikation isolierter Singularitäten

Identitätssatz.

4.1. Satz. *Es sei Ω ein Gebiet, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und*

$$\mathcal{N}(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}$$

die Nullstellenmenge von f. Dann gilt entweder $\mathcal{N}(f) = \Omega$ (*d. h. f ist die Nullfunktion*) oder *$\mathcal{N}(f)$ ist abzählbar und hat keinen Häufungspunkt in Ω.*

Im zweiten Fall gibt es zu jedem $a \in \mathcal{N}(f)$ eine eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ (die sogenannte Nullstellenordnung) mit

$$f(z) = (z-a)^m g(z), \tag{1}$$

wobei $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $g(a) \neq 0$.

4.2. Definition. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt Häufungspunkt der Teilmenge M des metrischen Raums X, falls es eine Folge (x_j) in M gibt mit $x_j \neq x_0 \,\forall\, j$ und $x_j \to x_0$.

Beachte: Es muss nicht $x_0 \in M$ sein.

Zum Beweis von 4.1 brauchen wir die folgenden zwei Lemmata.

4.3. Lemma. *Die Menge aller Häufungspunkte einer Menge M ist abgeschlossen.*

Beweis. Es sei (y_j) eine Folge von Häufungspunkten mit $y_j \to y$. Wir müssen zeigen: y ist Häufungspunkt.

Nach Annahme existieren Folgen (x_{jn}) in M mit $x_{jn} \to y_j$ für $n \to \infty$ und $x_{jn} \neq y_j \,\forall\, n$ $(*)$.

Wir betrachten die Folge $(x_{jj})_{j=1}^{\infty}$. Es gilt: $x_{jj} \to y$ und $x_{jj} \neq y$ für unendlich viele j (sonst wäre die Folge für alle $j \geq j_0$ konstant, was wegen $(*)$ nicht sein kann).

Also leistet eine Teilfolge von (x_{jj}) das Gewünschte. ◁

4.4. Lemma. *Jede offene Teilmenge U von $\mathbb{C}$ ist abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen.*

Beweis. $U_k := \{z \in U : |z| \leq k \text{ und } \operatorname{dist}(z, \partial U) \geq \frac{1}{k}\}$. Dann ist $U_1 \subseteq U_2, \ldots$, und $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$. Ferner sind alle U_k abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. ◁

Beweis von 4.1: Es sei H die Menge aller Häufungspunkte von $\mathcal{N}(f)$ in Ω. Dann ist nach Lemma 4.3 H abgeschlossen in Ω. Da f stetig ist, ist $f(a) = 0$ für alle $a \in H$.

Sei nun $a \in \mathcal{N}(f)$ und $r > 0$ mit $B(a, r) \subseteq \Omega$. Nach Satz 3.5 hat f eine Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in B(a, r). \tag{1}$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten

- Entweder sind alle c_n Null; in diesem Fall ist f die Nullfunktion, oder
- es gibt eine kleinste Zahl m mit $c_0 = \ldots = c_{m-1} = 0$ und $c_m \neq 0$. Natürlich ist $m \geq 1$, denn $c_0 = f(a) = 0$!

Im letzten Fall definieren wir

$$g(z) := \begin{cases} (z-a)^{-m} f(z) & z \in \Omega \setminus \{a\} \\ c_m & z = a. \end{cases}$$

Damit gilt 4.1(1). Klar ist, dass g auf $\Omega \setminus \{a\}$ holomorph ist. Aus (1) folgt jedoch, dass

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n} (z-a)^n, \quad z \in B(a,r).$$

Folglich ist $g \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Weil $g(a) \neq 0$, existiert auch eine Umgebung von a mit $g(z) \neq 0$. Folglich ist a die einzige Nullstelle von f in dieser Umgebung und a kann kein Häufungspunkt von Punkten in $\mathcal{N}(f)$ sein.

Ist also a ein Häufungspunkt von $\mathcal{N}(f)$ in Ω, so ist $f \equiv 0$ in $B(a,r)$. Daher ist H nicht nur abgeschlossen sondern auch offen in Ω. Also haben wir die Alternativen:

(i) $H = \emptyset$, d.h. $\mathcal{N}(f)$ hat keine Häufungspunkte in Ω, oder
(ii) $H = \Omega$, d.h. $f \equiv 0$ auf Ω.

Falls f nicht die Nullfunktion ist, hat $\mathcal{N}(f)$ keine Häufungspunkte in Ω. In jeder kompakten Teilmenge von Ω können daher nur endlich viele Elemente von $\mathcal{N}(f)$ liegen. Nach Lemma 4.4 folgt die Abzählbarkeit. ◁

4.5. Folgerung. (Identitätssatz) Es seien $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $f(z) = g(z)$ auf einer Teilmenge von Ω, die einen Häufungspunkt enthält (z. B. einer Folge (z_n) mit Grenzwert $z_0 \in \Omega$). Dann ist $f = g$.

4.6. Bemerkung. Der Häufungspunkt muss in Ω liegen:

$$f(z) = \sin \frac{1}{z} \ \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

hat eine Folge von Nullstellen in $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k = 1, 2, \ldots$, mit $z_k \to 0$, stimmt aber nicht mit der Nullfunktion überein.

Isolierte Singularitäten.

4.7. Definition. Ist $a \in \Omega$ und $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, so nennt man a eine *isolierte* Singularität von f in Ω.

Wenn man f in a so definieren kann, dass die resultierende Funktion auf ganz Ω holomorph ist, so heißt a *hebbare* Singularität.

Beispiel: $\frac{\sin z}{z}$ hat in Null eine hebbare Singularität.

4.8. Satz. (Hebbarkeitssatz) *Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ beschränkt in einer Umgebung von a. Dann hat f in a eine hebbare Singularität.*

Beweis. Setze

$$h(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & z \in \Omega \setminus \{a\} \\ 0 & z = a \end{cases}.$$

Dann ist h offensichtlich auf $\Omega \setminus \{a\}$ differenzierbar. Auch in a ist h differenzierbar mit Ableitung Null, denn

$$\lim_{z \to a} \frac{h(z) - h(a)}{z - a} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) \to 0,$$

da f in einer Umgebung von a beschränkt ist. Auf jeder Kreisscheibe $B(a,r) \subseteq \Omega$ hat h also eine Potenzreihendarstellung

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Folglich ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-a)^n$ für $z \in B(a,r) \setminus \{a\}$ und die Definition $f(a) := c_2$ liefert eine holomorphe Fortsetzung. ◁

4.9. Satz. (Casorati–Weierstraß) *Ist $a \in \Omega$ und $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$, so liegt einer der folgenden (verschiedenen) Möglichkeiten vor:*

(a) *f hat eine hebbare Singularität in a. In diesem Fall ist f in einer Umgebung von a beschränkt.*

(b) *Es gibt komplexe Zahlen $c_1, \dots, c_m$, $m \geq 1$, $c_m \neq 0$ derart, dass*

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

eine hebbare Singularität in a hat. Man sagt dann, f habe einen Pol der Ordnung m in a und nennt $\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ den Hauptteil von f in a. Den Koeffizienten c_1 vom $(z-a)^{-1}$ nennt man das Residuum von f in a. Man schreibt $\operatorname{Res}_a f$ oder $\operatorname{Res}(f; a)$.

In diesem Fall gilt

$$|f(z)| \to \infty \quad \text{für} \quad z \to a.$$

(c) *Für jedes $r > 0$ ist das Bild von $B(a,r) \setminus \{a\}$ unter f dicht in $\mathbb{C}$. Man sagt dann, dass f in a eine wesentliche Singularität habe.*

Beachte: *Wir können die drei Fälle anhand des Wachstumsverhaltens von f nahe a unterscheiden. Mehr in 4.14.*

Beweis. Annahme, Fall (c) liegt nicht vor. Dann existiert ein $r > 0$, ein $\delta > 0$ und ein $\omega \in \mathbb{C}$ mit

$$|f(z) - \omega| > \delta \quad \forall\, z \in B(a,r) \setminus \{a\}.$$

Wir schreiben $B := B(a,r)$, $\dot{B} = B(a,r) \setminus \{a\}$ und definieren

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - \omega}, \quad z \in \dot{B}. \tag{1}$$

Dann ist $g(z) \in \mathcal{H}(\dot{B})$ und $|g| < \delta$. Nach dem Hebbarkeitssatz 4.8 hat g eine holomorphe Fortsetzung auf B. Wir unterscheiden zwei Möglichkeiten

(i) $g(a) \neq 0$. Dann ist f wegen (1) in einer Umgebung von a beschränkt. Wiederum nach 4.8 liegt Fall (a) vor.

(ii) $g(a) = 0$. Nach Satz 4.1 hat g eine Nullstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, d. h. $\exists\, m \geq 1$, $\tilde{g} \in \mathcal{H}(B)$ mit $\tilde{g}(a) \neq 0$ und

$$g(z) = (z-a)^m \tilde{g}(z).$$

Da f auf $\dot{B}$ holomorph ist, hat g keine weitere Nullstelle in B. Somit ist $\tilde{g}(z) \neq 0$ für alle $z \in B$. Wir können also die Funktion

$$h := \frac{1}{\tilde{g}} \quad \in \mathcal{H}(B)$$

definieren; h hat keine Nullstelle auf B. Es gilt

$$f(z) - \omega = (z-a)^{-m} h(z), \quad z \in \dot{B}. \tag{2}$$

Zudem können wir h in eine Potenzreihe entwickeln

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n, \quad z \in B, \tag{3}$$

wobei $b_0 \neq 0$ ist.

Kombination von (2) und (3) liefert die Behauptung. ◁

4.10. Definition. Es sei $0 \le r < R \le \infty$, $a \in \mathbb{C}$. Definiere

$$U_{rR}(a) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}.$$

4.11. Lemma. *Für $f \in \mathcal{H}(U_{rR}(a))$ und $r < \rho < R$ gilt*

$$\oint\limits_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz$$

ist unabhängig von der Wahl von ρ.

Beweis. Betrachte für $r < \rho_1 < \rho_2 < R$ die Differenz

$$\oint\limits_{|z-a|=\rho_1} f(z)\,dz - \oint\limits_{|z-a|=\rho_2} f(z)\,dz.$$

Durch Zerlegung wie gezeichnet hat man die Differenz dargestellt als Summe

$$\int_{\gamma_1} + \ldots + \int_{\gamma_N},$$

wobei die Wege γ_j in konvexen Teilmengen von $U_{rR}(a)$ verlaufen. Es folgt nach dem Cauchyschen Integralsatz 3.3, dass jeder Summand Null ist. ◁

4.12. Cauchysche Integralformel für Kreisringe. Es sei $0 \le r < r' < R' < R \le \infty$, $f \in \mathcal{H}(U_{rR}(a))$, $z \in U_{r'R'}(a)$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=R'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Beweis. Schreibe wie in 4.11 die Differenz als Summe von Integralen über Wege, die jeweils in konvexen Teilmengen von $U_{rR}(a)$ verlaufen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege z auf keiner der Trennlinien. Dann ist $\mathrm{Ind}_{\gamma_j}(z) = 1$ für ein $j \in \{1, \ldots, N\}$; für alle anderen ist $\mathrm{Ind}_{\gamma_j}(z) = 0$. Die Cauchysche Integralformel liefert

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=R'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_j \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z).$$

◁

4.13. Laurent-Reihen. Ist $f \in \mathcal{H}(U_{rR}(a))$, so gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k,$$

wobei

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz$$

für beliebiges $\rho \in]r, R[$. Die Reihen konvergieren gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $U_{rR}(a)$. Die Koeffizienten in der Darstellung sind eindeutig.

Beweis. Nach 4.12 ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=R'} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = F(z) - H(z)$$

für $r < r' < R' < R$, $z \in U_{r'R'}(a)$. Weil $|z-a| < R'$ ist, schließt man wie in 2.12: F ist holomorph,

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw$$

(unabhängig von ρ nach 4.11).

Für $|w-a| = r' < |z-a|$ ist

$$w - z = (w-a) - (z-a) = (z-a)\left(\frac{w-a}{z-a} - 1\right).$$

Also ist

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^k.$$

Wir erhalten

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \oint\limits_{|w-a|=r'} f(w)(w-a)^k (z-a)^{-k-1}\, dw.$$

Also:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw. \tag{1}$$

Die Potenzreihe für F konvergiert für $|z-a| < R$, diejenige für H auf $|z-a| > r$. Beide konvergieren absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $U_{rR}(a)$.

Die Eindeutigkeit der Koeffizienten folgt aus der Formel (1). ◁

4.14. Nochmals: Isolierte Singularitäten. Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{H}(U_{0R}(a)) = B(a,R) \setminus \{a\}$ für ein $R > 0$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

mit geeigneten $c_k \in \mathbb{C}$. Man nennt

$$h_a(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k$$

den Hauptteil von f in a und den Koeffizienten c_{-1} (nach 4.13 ist $c_{-1} = \oint_{|w-a|=\rho} f(w)\, dw$) das Residuum von f in a.

Wir erhalten nun eine weitere Klassifikation der isolierten Singularitäten über den Hauptteil der Laurentreihe: Die Funktion h_a ist nach Satz 4.13 holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Es gilt

(i) f hat eine hebbare Singularität in $a \Leftrightarrow h_a = 0 \Leftrightarrow c_k = 0$ für alle $k < 0$.

(ii) f hat einen Pol der Ordnung m in $a \Leftrightarrow h_a = \sum_{j=-m}^{-1} c_k (z-a)^k$ mit $c_m \neq 0$ (endliche Summe).

(iii) f hat eine wesentliche Singularität in $a \Leftrightarrow$ unendlich viele c_k sind $\neq 0$.

4.15. Definition. Singularitäten im Unendlichen. Es sei $f \in \mathcal{H}(U_{r,\infty}(a))$. Wir sagen f habe im Unendlichen eine hebbare Singularität, einen Pol, eine wesentliche Singularität, falls die Funktion

$$g(z) := f(1/z) \in \mathcal{H}(U_{0,\frac{1}{r}}(0))$$

die entsprechende Singularität in Null hat.

4.16. Beispiel. Ein Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{m} c_k z^k$ vom Grad $m \geq 1$ hat im Unendlichen einen Pol der Ordnung m. Ist $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ kein Polynom, so hat f eine wesentliche Singularität im Unendlichen. Ist $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ und hat f im Unendlichen eine hebbare Singularität, so ist f konstant.

5. Der Satz von der offenen Abbildung. Maximumprinzip

Die lokale Struktur holomorpher Funktionen.

5.1. Lemma. *Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und g definiert auf $\Omega \times \Omega$ durch*

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \neq w \\ f'(z) & z = w \end{cases}.$$

Dann ist g stetig auf $\Omega \times \Omega$.

Beweis. Klar: g ist stetig auf $(\Omega \times \Omega) \setminus \{(a,a) : a \in \Omega\}$. Sei also $a \in \Omega$ fest, $\varepsilon > 0$. Es existiert ein $\rho > 0$ mit $B(a,\rho) \subseteq \Omega$ und $|f'(\xi) - f'(a)| < \varepsilon$ für alle $\xi \in B(a,\rho)$.

Für $z, w \in B(a,\rho)$ ist

$$\xi(t) = (1-t)z + tw \in B(a,\rho), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Es folgt

$$g(z,w) - g(a,a) = \int_0^1 (f'(\xi(t)) - f'(a))\, dt.$$

Der Absolutbetrag des Integranden ist kleiner ε. Damit ist g stetig in (a,a). ◁

5.2. Satz. *Es sei $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ und $\varphi'(z_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung V von z_0 in Ω mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *φ ist injektiv auf V.*

(b) *$W = \varphi(V)$ ist offen.*

(c) *Ist ψ die Inverse zu $\varphi : V \to W$, so ist $\psi \in \mathcal{H}(W)$.*

Also ist φ lokal invertierbar und hat eine holomorphe Inverse.

Beweis. Wendet man das obige Lemma auf φ an, so sieht man, dass es eine Umgebung V von z_0 gibt mit

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \geq \frac{1}{2}|\varphi'(z_0)|\,|z_1 - z_2| \tag{1}$$

für $z_1, z_2 \in V$. Daraus folgt (a).

Indem man eventuell V verkleinert, kann man erreichen, dass

$$\varphi'(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in V.$$

Zum Beweis von (b) fixiere $\xi \in V$. Wähle $r > 0$ mit $\overline{B(\xi,r)} \subseteq V$. Wegen (1) existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|\varphi(\xi + re^{it}) - \varphi(\xi)| > 2\delta, \quad -\pi \leq t \leq \pi. \tag{2}$$

Ist nun $\alpha \notin \varphi(V)$, so ist $h = \frac{1}{\alpha - \varphi}$ holomorph in V. Ferner ist

$$2\delta < |\varphi(\xi + re^{it}) - \varphi(\xi)| \leq |\alpha - \varphi(\xi + re^{it})| + |\alpha - \varphi(\xi)|. \tag{3}$$

Andererseits folgt aus der Cauchyformel

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\alpha-\varphi(\xi)|} &= |h(\xi)| = |\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(\xi+re^{it})}{re^{it}}ir\,dt| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h(\xi+re^{it})|\,dt \\ &\le \sup_{-\pi\le t\le\pi}|h(\xi+re^{it})| \\ &= |h(\xi+re^{it_0})| \quad \text{für ein } t_0 \\ &= \frac{1}{|\alpha-\varphi(\xi+re^{it_0})|}.\end{aligned}$$

Dies liefert

$$|\alpha-\varphi(\xi+re^{it_0})| \le |\alpha-\varphi(\xi)|,$$

also mit (3)

$$2\delta < |\alpha-\varphi(\xi+re^{it_0})| + |\alpha-\varphi(\xi)| \le 2|\alpha-\varphi(\xi)|$$

und daher $|\alpha-\varphi(\xi)| > \delta$. Folglich ist $\varphi(V) \supseteq B(\varphi(\xi),\delta)$. Da ξ beliebig war, folgt die Offenheit von $\varphi(V)$.

Zum Beweis von (c) fixiere $w_1 \in W$. Dann gibt es genau ein $z_1 \in V$ mit $\varphi(z_1) = w_1$. Ist nun $w \in W$ und $\psi(w) = z \in V$, so folgt

$$\frac{\psi(w)-\psi(w_1)}{w-w_1} = \frac{z-z_1}{\varphi(z)-\varphi(z_1)}. \tag{4}$$

Aus (1) folgt, dass $z \to z_1$ konvergiert, falls $w \to w_1$ geht. Da $\varphi'(z_1) \neq 0$ ist, liefert (4) die Differenzierbarkeit von ψ in w_1 und, dass $\psi'(w_1) = 1/\varphi'(z_1)$. ◁

Jetzt wollen wir sehen, was passiert, wenn die Ableitung Nullstellen hat. Dazu zuerst:

5.3. Definition und Bemerkung. Für $m = 1, 2, \ldots$ definiere die m-te Potenzfunktion $\pi_m : z \mapsto z^m$. Für jedes $w \neq 0$ hat die Gleichung $\pi_m(z) = w$ genau m Lösungen. Für $w = re^{i\vartheta}$ sind dies die Punkte

$$z_k = \sqrt[m]{r}\, e^{i(\vartheta+2\pi k)/m}.$$

Wir beobachten:

(i) Die Abbildung π_m ist offen, d. h. das Bild jeder offenen Menge unter π_m ist offen: Ist V offen in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, so ist $\pi_m(V)$ nach dem vorigen Satz offen; ist dagegen $V = B(0,r)$, so ist $\pi_m(V) = B(0,r^m)$ offen. Da jede offene Menge als Vereinigung von zweien dieser Form geschrieben werden kann, folgt die Behauptung.

(ii) Die Komposition offener Abbildungen ist offen. Nach dem vorigen Satz ist insbesondere $\pi_m \circ \varphi$ offen, falls φ' keine Nullstelle hat.

Im folgenden Satz sehen wir, dass jede nichtkonstante Funktion bis auf eine additive Konstante lokal von der Form $\pi_m \circ \varphi$ ist:

5.4. Satz. *Es sei Ω ein Gebiet, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nicht konstant, $z_0 \in \Omega$ und $w_0 = f(z_0)$. Es sei m die Ordnung der Nullstelle von $f - w_0$ in z_0. Dann gibt es eine Umgebung V von z_0 und ein $\varphi \in \mathcal{H}(V)$ mit*

(1) $f(z) = w_0 + \varphi(z)^m$, $z \in V$.

(2) $\varphi'(z) \neq 0 \,\forall\, z \in V$ *und* $\varphi : V \to B(0,r)$ *ist invertierbar für eine geeignete Kugel* $B(0,r)$.

Bemerkung: Es ist also $f - w_0 = \pi_m \circ \varphi$. Die Abbildung f hat also die Eigenschaft, dass sie $V \setminus \{z_0\}$ auf $B(w_0, r^m) \setminus \{w_0\}$ abbildet, wobei jeder Punkt genau m Urbilder hat. Ferner ist w_0 innerer Punkt von $f(\Omega)$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei Ω konvexe Umgebung von z_0, die so klein ist, dass $f(z) \neq w_0$ für alle $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$. Dann ist

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z)$$

für ein nullstellenfreies $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Folglich ist $g'/g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Nach Satz 3.3 hat g'/g eine Stammfunktion h in Ω. Die Ableitung von ge^{-h} ist Null in Ω. Indem man h um eine Kostante ändert, kann man erreichen, dass $g = e^h$ gilt. Definiere

$$\varphi(z) = (z - z_0)e^{h(z)/m}.$$

Damit folgt (1).

Ferner gilt $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) \neq 0$. Aus Satz 5.2(b) folgt also, dass wir (2) erreichen können, falls wir V etwas verkleinern.

5.5. Folgerung. Satz von der offenen Abbildung. Ist Ω ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, so ist $f(\Omega)$ entweder ein Punkt oder ein Gebiet. Dies folgt sofort aus der Bemerkung nach dem Satz 5.4.

5.6. Folgerung. Es sei Ω ein Gebiet, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und f injektiv. Dann ist $f'(z) \neq 0 \,\forall\, z \in \Omega$.

Beweis. Wäre $f'(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in \Omega$, so hätte f in z_0 eine mehrfache Nullstelle, die Aussage von 5.4(b) würde also für ein $m > 1$ gelten. Damit wäre f aber nicht mehr injektiv: Für eine Umgebung U von z_0 hätte f zu jedem Bildpunkt m Urbilder. ◁

5.7. Bemerkung. Die Umkehrung gilt nicht: Es gibt holomorphe Funktionen f mit $f'(z) \neq 0$ für alle z obwohl f nicht injektiv ist (z. B. $f(z) = e^z$).

Maximumsprinzipien.

5.8. Starkes Maximumsprinzip. Der Betrag einer nichtkonstanten Funktion $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nimmt auf Ω kein Maximum an.

Beweis. Ist f nichtkonstant und w im Bild von f, so ist w ein innerer Punkt des Bildes, weil das Bild von f offen ist. Damit kann in w kein maximaler Wert sein: Es gibt in der Umgebung stets Elemente mit größerem Betrag. ◁

5.9. Bemerkung. Minima kann der Betrag jedoch haben; betrachte z.B. $f(z) = z$.

Wir erhalten als Folgerung:

5.10. Satz. (Maximumsprinzip). Es sei Ω ein beschränktes Gebiet, $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Dann nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand von Ω an:

$$|f(z)| \leq \max_{w \in \partial\Omega} |f(w)|, \quad z \in \Omega. \tag{1}$$

Dabei gilt Gleichheit höchstens, wenn f konstant ist.

Beweis. Die Menge $\overline{\Omega}$ ist als Abschluß einer beschränkten Menge kompakt. Da f auf $\overline{\Omega}$ stetig ist, nimmt f auf $\overline{\Omega}$ sein Maximum an. Ist f konstant, so gilt „=“ in (1). Ist f nicht konstant, so kann $|f|$ kein Maximum im Inneren annehmen, wie in 5.8 gezeigt. Somit gilt „<“ in (1). ◁

6. Globale Versionen des Cauchyschen Integralsatzes. Residuensatz

Homotopie und Homologie.

6.1. Ketten und Zyklen. Es seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ Wege in der Ebene und

$$K = \operatorname{Bild}\gamma_1 \cup \dots \cup \operatorname{Bild}\gamma_n.$$

Jedes γ_j liefert eine lineare Abbildung $\tilde{\gamma}_j : C(K) \to \mathbb{C}$ durch

$$\tilde{\gamma}_j(f) = \int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

Wir können also formal die Summe dieser Wege definieren, indem wir sagen, welche lineare Abbildung sie auf $C(K)$ induziert. Mit anderen Worten: Wir schreiben

$$\Gamma := \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \dots \dot{+} \gamma_n, \tag{1}$$

nennen Γ die formale disjunkte Summe der Wege und setzen

$$\int_\Gamma f(z)\,dz := \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz, \quad f \in C(K).$$

Solche formalen Summen von Wegen Γ nennt man Ketten; wir nennen die obige Menge K das Bild von Γ. Wir sprechen von einer "Kette Γ in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$", falls $\operatorname{Bild}\Gamma \subseteq \Omega$. Sind alle γ_j geschlossen, so heißt Γ Zyklus. Eine Kette kann auf vielerlei Weise als Summe von Wegen dargestellt werden. Die Identität

$$\gamma_1 \dot{+} \dots \dot{+} \gamma_n = \delta_1 \dot{+} \dots \dot{+} \delta_m$$

heißt lediglich, dass

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \int_{\delta_k} f(z)\,dz, \quad f \in C(K).$$

Ist Γ ein Zyklus und $w \notin \operatorname{Bild}\Gamma$, so definieren wir die Windungszahl von Γ bezüglich w durch

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z-w}.$$

Klar: $\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = \sum \operatorname{Ind}_{\gamma_j}(w)$. Wird jedes γ_j durch den entgegengesetzten Weg ersetzt, so nennt man die entsprechende Kette $-\Gamma$; es gilt dann

$$\int_{-\Gamma} f(z)\,dz = -\int_\Gamma f(z)\,dz.$$

Insbesondere ist $\operatorname{Ind}_{-\Gamma}(w) = -\operatorname{Ind}_\Gamma(w)$, falls Γ Zyklus und $\alpha \notin \operatorname{Bild}\Gamma$.

Man kann in offensichtlicher Weise Ketten formal addieren $\Gamma = \Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$ soll heißen

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

6.2. Satz von Cauchy. Es sei Ω beliebige offene Menge in $\mathbb{C}$, Γ ein Zyklus in Ω mit

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = 0 \quad \text{für alle} \quad w \in \mathbb{C} \setminus \Omega. \tag{1}$$

Dann gilt

$$f(z)\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw, \quad z \in \Omega \setminus \operatorname{Bild}\Gamma \tag{2}$$

und

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0. \tag{3}$$

Sind ferner Γ_1 und Γ_2 Zyklen in Ω mit $\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(w) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(w)$ für jedes w, das nicht in Ω liegt, so ist

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Beweis. Auf $\Omega \times \Omega$ definieren wir die Funktion g durch

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & z \neq w \\ f'(z) & z = w \end{cases}.$$

Wir wissen aus Lemma 5.1, dass g stetig ist. Daher können wir $h : \Omega \to \mathbb{C}$ durch

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z,w)\,dw \tag{4}$$

definieren.

Ist $z \in \Omega \setminus \mathrm{Bild}\,\Gamma$, so ist – nach Definition der Windungszahl – Aussage (2) äquivalent dazu, dass $h(z) = 0$ ist. Dies wollen wir zeigen. Wir überzeugen uns zunächst davon, dass $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ ist: Erstens ist h stetig als Integral über eine stetige Funktion.

> Direkter Beweis mit dem Satz von der dominierten Konvergenz: Aus $z_n \to z_0$ folgt $g(z_n, w) \to g(z_0, w)\,\forall\, w \in \Omega$, ferner ist $|g(z,w)| \leq C$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\Omega \times \Omega$, also
>
> $$h(z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z_n,w)\,dw \overset{\text{dom. K.}}{\to} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z_0,w)\,dw = h(z_0).)$$

Die Holomorphie zeigen wir nun mit dem Satz von Morera: Es sei $\triangle \subseteq \Omega$ ein abgeschlossenes Dreieck. Mit dem Satz von Fubini sehen wir, dass

$$\int_{\partial\triangle} h(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\int_{\partial\triangle} g(z,w)\,dz\right) dw.$$

Nun ist für jedes feste w die Funktion

$$z \mapsto g(z,w)$$

holomorph (sie hat eine isolierte hebbare Singularität in $z = w$). Also ist das innere Integral Null, folglich auch die linke Seite. Der Satz von Morera liefert also die Holomorphie von h.

Nun sei Ω_0 die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$. Wir setzen

$$h_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Ist $z \in \Omega_0 \cap \Omega$, so folgt

$$(h_0 - h)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z}\,dw = f(z)\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0.$$

Also gibt es eine holomorphe Funktion $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega \cup \Omega_0)$ mit $\varphi|_\Omega = h$, $\varphi|_{\Omega_0} = h_0$. Wegen (1) ist $(\mathbb{C} \setminus \Omega) \subseteq \Omega_0$. Also ist $\Omega \cup \Omega_0 = \mathbb{C}$ und φ eine ganze Funktion. Ferner enthält Ω_0 auch die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Bild}\,\Gamma$, da dort $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$ gilt. Es folgt

$$\lim_{|z|\to\infty} \varphi(z) = \lim_{|z|\to\infty} h_0(z) = 0$$

(dominierte Konvergenz) und somit $\varphi = 0$ nach Liouville. Es folgt $h \equiv 0$ und damit die Behauptung.

Wir sehen, dass

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw$$

und erhalten (2). Ferner folgt (3), weil

$$\int_\Gamma f(w)\,dw = \int_\Gamma \frac{f(w)(w-z)}{w-z}\,dw = 2\pi i \operatorname{Ind}_\Gamma(z)\ (f(w)(w-z))_{|w=z} = 0.$$

Schließlich gilt für den Zyklus $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$, dass $\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \notin \Omega$, so dass sich (4) aus (3) ergibt:

$$0 = \int_\Gamma f(w)\,dw = \int_{\Gamma_1} f(w)\,dw - \int_{\Gamma_2} f(w)\,dw.$$

◁

6.3. Bemerkung.

(a) Wann ist die Voraussetzung „$\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0\,\forall\,\alpha \notin \Omega$“ erfüllt? Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn Ω konvexes Gebiet ist und γ geschlossener Weg in Ω. Weil $\frac{1}{w-z}$ auf Ω holomorph ist, ist nach dem Satz von Cauchy für konvexe Gebiete dann nämlich

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-\alpha}\,dw = \operatorname{Ind}_\gamma(\alpha).$$

Damit ist 6.2 eine echte Verallgemeinerung von Satz 3.4.

(b) Wie sieht ein Beispiel für Zyklen γ_1, γ_2 aus mit

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \quad \forall\, f \in \mathcal{H}(\Omega)\,?$$

Wähle $\Omega = \mathbb{C} \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$, wobei D_j, $j = 1,2,3$, disjunkte Kreise sind. Wähle $\delta_j =$ positiv orientierter Kreis um ∂D_j und $\gamma =$ positiv orientierter Kreis, der D_1, D_2 und D_3 einschließt. Dann ist

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \sum \int_{\delta_j} f(z)\,dz$$

für alle $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

6.4. Definition. Man nennt zwei Zyklen γ_1, γ_2 in Ω homolog, falls gilt

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(a) = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(a) \quad \forall\, a \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

6.5. Homotopie. (Erinnerung). Es seien γ_0, γ_1 geschlossene Kurven in Ω mit Parameter-Intervall $[a,b]$. Man nennt γ_0 homotop zu γ_1 in Ω, falls eine stetige Abbildung

$$H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$$

existiert mit $H(s,0) = \gamma_0(s)$, $H(s,1) = \gamma_1(s)$.

6.6. Lemma. *Es seien γ_0, γ_1 geschlossene Kurven in Ω mit Parameter-Intervall $I = [0,1]$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Gilt*

(1) $$|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)|,$$

so ist

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(\alpha).$$

Beachte: (1) ist insbesondere erfüllt, falls $|\gamma_0(s) - \gamma_1(s)| < \min\{|\gamma_0(s) - \alpha| : 0 \le s \le 1\}$.

Beweis. Aus (1) folgt, dass α weder im Bild von γ_0 noch im Bild von γ_1 liegt. Wir können also den Weg

$$\gamma(s) = \frac{\gamma_1(s) - \alpha}{\gamma_0(s) - \alpha}$$

definieren. Dann gilt

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - \alpha} - \frac{\gamma_0'}{\gamma_0 - \alpha}$$

und

$$|1 - \gamma(s)| = \frac{|\gamma_0(s) - \gamma_1(s)|}{|\gamma_0(s) - \alpha|} < 1.$$

Also ist $\operatorname{Bild}\gamma \subseteq B(1,1)$ und somit $\operatorname{Ind}_\gamma(0) = 0$ (da 0 in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild}\gamma$ liegt). Nun ist

$$\begin{aligned} 0 = 2\pi i \operatorname{Ind}_\gamma(0) &= \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - 0}\, ds = \int_0^1 \frac{\gamma_1'(s)}{\gamma_1(s) - \alpha}\, ds - \int_0^1 \frac{\gamma_0'(s)}{\gamma_0(s) - \alpha}\, ds \\ &= 2\pi i \,(\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) - \operatorname{Ind}_{\gamma_0}(\alpha)). \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. ◁

6.7. Satz. *Es seien γ_0, γ_1 homotope geschlossene Kurven in Ω.. Dann ist*

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) \quad \textit{für alle } \alpha \notin \Omega.$$

Also: Aus Homotopie folgt Homologie.

Beweis. O.B.d.A. mögen γ_1, γ_0 beide Parameter-Intervall $I = [0,1]$ haben. Es sei $H : I \times I \to \Omega$ die Homotopie. Da $I \times I$ kompakt ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass

$$|\alpha - H(s,t)| > 2\varepsilon \quad \text{für alle } s,t \in I \times I. \tag{1}$$

Da H gleichmäßig stetig ist, existiert ferner ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|H(s,t) - H(s',t')| < \varepsilon \quad \text{falls } |s - s'| + |t - t'| \le \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Wir definieren nun Polygonzüge $g_0, \dots, g_n$ durch

$$g_k(s) = H(\frac{j}{n}, \frac{k}{n})(ns + 1 - j) + H(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n})(j - ns) \tag{3}$$

für $j - 1 \le ns \le j$ und $j = 1, \dots, n$. Aus (2) und (3) folgt, dass

$$|g_k(s) - H(s, \frac{k}{n})| < \varepsilon, \quad k = 0, \dots, n,\ 0 \le s \le 1. \tag{4}$$

Insbesondere erhalten wir für $k = 0$ und $k = n$:

$$|g_0(s) - \gamma_0(s)| < \varepsilon, \quad |g_n(s) - \gamma_1(s)| < \varepsilon, \quad 0 \le s \le 1. \tag{5}$$

Aus (4) und (1) folgt, dass

$$|\alpha - g_k(s)| > \varepsilon \quad \text{für alle } s \in I, k = 0, \dots, n. \tag{6}$$

Andererseits liefern (3) und (2), dass

$$|g_{k-1}(s) - g_k(s)| < \varepsilon \quad \text{für alle } s \in I, k = 1, \dots, n. \tag{7}$$

Nun schließen wir aus (5), (6) und (7) und $(n+2)$-facher Anwendung von Lemma 6.6, dass die Windungszahl von $\gamma_0, g_0, \dots, g_n, \gamma_1$ bezüglich α dieselbe ist. ◁

Meromorphie und Residuensatz.

6.8. Definition. Die Funktion f heißt meromorph in der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, falls

(i) $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$ ist, wobei

(ii) die Menge $A \subseteq \Omega$ von Ausnahmepunkten keinen Häufungspunkt in Ω hat und

(iii) f in jedem $a \in A$ einen Pol hat.

Schreibe: $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

6.9. Bemerkung.

(a) Es wird nicht ausgeschlossen, dass $A = \emptyset$. Jede holomorphe Funktion in Ω ist also meromorph.

(b) Nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß hat jede Folge, die in einer kompakten Teilmenge K von $\mathbb{C}$ liegt, eine konvergente Teilfolge in K. Folglich enthält jede kompakte Teilmenge von Ω nur endlich viele Punkte von A. Damit ist A abzählbar.

6.10. Residuensatz. Es sei f eine Funktion mit den Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 6.8, z.B. sei f meromorph in Ω. Bezeichne mit A die Singularitätenmenge von f. Ist Γ ein Zyklus in $\Omega \setminus A$ mit

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \quad \text{für alle} \quad \alpha \notin \Omega, \tag{1}$$

so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f; a) \operatorname{Ind}_\Gamma(a). \tag{2}$$

Beweis. 1. *Schritt.* Wir zeigen, dass die Menge $B = \{a \in A : \operatorname{Ind}_\gamma(a) \neq 0\}$ nur endlich ist, so dass die Summe in (2) endlich ist: Angenommen, es gäbe eine Folge $(a_j) \subseteq A$ mit $\operatorname{Ind}_\Gamma a_j \neq 0$. Dann ist (a_j) beschränkt, denn auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente ist $\operatorname{Ind}_\gamma(\cdot)$ konstant Null. Damit hat (a_j) einen Häufungspunkt, a. Dieser liegt in $\partial\Omega \subseteq \mathbb{C}\setminus\Omega$, da A in Ω nach Annahme keinen Häufungspunkt hat. Also ist $\operatorname{Ind}_\Gamma a = 0$. Es folgt wegen der Konstanz des Index auf Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild}\Gamma$, dass $\operatorname{Ind}_\Gamma(a_j) = 0$ für große j. Widerspruch!

2. *Schritt.* Es seien $b_1, \ldots, b_k$ die Elemente von B und $Q_1, \ldots, Q_k$ die zugehörigen Hauptteile von f. Dann ist die Funktion

$$g = f - (Q_1 + \ldots + Q_k)$$

holomorph fortsetzbar auf ganz Ω. Die Cauchysche Integralformel liefert

$$0 = \int_\Gamma g(z)\, dz = \int_\Gamma f(z)\, dz - \sum_{j=1}^{k} \int_\Gamma Q_j(z)\, dz.$$

3. *Schritt.* Schreibe

$$Q_j(z) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{-l}^{(j)} (z - b_j)^{-l}.$$

Da die Reihe außerhalb jeder Kugel $B(b_j, r)$, $r > 0$, gleichmäßig konvergiert (s. Beweis von 4.13) und auf $\mathbb{C} \setminus \{b_j\}$ holomorph ist, gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma Q_j(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^{\infty} a_{-l}^{(j)} \int_\Gamma \frac{dz}{(z - b_j)^l} = a_{-1}^{(j)} \operatorname{Ind}_\Gamma(b_j),$$

denn für $l \neq -1$ ist das Integral Null (dann existiert eine Stammfunktion nach Hilfssatz 2.21). Da $a_{-1} = \operatorname{Res}(f; b_j)$ ist, folgt die Behauptung. ◁

6.11. Bemerkung. Es sei f auf jedem Intervall $[-R, R]$, $R > 0$, Riemann- oder auch Lebesgue-integrierbar. Wir setzen

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx,$$

falls der Grenzwert existiert. Bezeichnung: Hauptwert (valeur principal, principal value, auch pv statt vp).

6.12. Beispiel: Anwendung des Residuensatzes. Es sei $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, f sei meromorph auf einer offenen Umgebung U von H mit endlich vielen Polen $a_1, \ldots, a_n$, $\operatorname{Im} a_k > 0$ für alle k. Es gelte

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} f(Re^{-it})Re^{it}\,dt = 0.$$

Dann ist

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; a_k).$$

Beweis. Wähle γ als folgenden Weg: Von $-R$ bis R auf der reellen Achse, von R nach $-R$ auf dem Halbkreis durch die obere Halbebene. Dann ist

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_k) \overset{6.10}{=} \int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + i\int_0^{\pi} f(Re^{it})Re^{it}\,dt.$$

Grenzwert für $R \to \infty$ liefert die Aussage. ◁

6.13. Lemma. *$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sei offen, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, $a \in \Omega$.*

(a) *Ist a Nullstelle der Ordnung m, so ist* $\operatorname{Res}(\frac{f'}{f}; a) = m$.

(b) *Ist a Pol der Ordnung m, so ist* $\operatorname{Res}(\frac{f'}{f}; a) = -m$.

Beweis. (a) Schreibe $f(z) = (z-a)^m g(z)$, wobei $g(z) \neq 0$ nahe a. Dann ist $f'(z)/f(z) = \frac{m}{z-a} + g'(z)/g(z)$.

(b) analog. ◁

6.14. Satz. *Es sei Ω offen in $\mathbb{C}$, Γ ein Zyklus in Ω mit*

$$\operatorname{Ind}_{\gamma}(\alpha) = 0 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Es sei f meromorph auf Ω mit endlich vielen Polen $b_1, \ldots, b_k$ der Ordnungen $l_1, \ldots, l_k$ und endlich vielen w-Stellen $a_1, \ldots, a_n$ der Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_n$; keiner dieser Punkte liege auf Γ. Dann gilt für beliebiges $F \in \mathcal{H}(\Omega)$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(z) \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dw = \sum_{j=1}^{n} m_j \operatorname{Ind}_{\Gamma}(a_j) F(a_j) - \sum_{j=1}^{k} l_j \operatorname{Ind}_{\Gamma}(b_j) F(b_j).$$

Dabei heißt a w-Stelle der Vielfachheit m von f, falls a Nullstelle der Vielfachheit m von $f - w$ ist, $w \in \mathbb{C}$.

Beweis. Nach dem Residuensatz ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(z) \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dw = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left(F\frac{f'}{f-w}; a_j\right) \operatorname{Ind}_{\Gamma}(a_j) + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left(F\frac{f'}{f-w}; b_j\right) \operatorname{Ind}_{\Gamma}(b_j)$$

Nun hat $f'/(f-w) = (f-w)'/(f-w)$ höchstens Pole erster Ordnung nach 6.13. Es folgt

$$\operatorname{Res}\left(F\frac{f'}{f-w}, a_j\right) = F(a_j)\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f-w}, a_j\right) \overset{6.13}{=} F(a_j)m_j.$$

Analog:

$$\operatorname{Res}\left(F\frac{f'}{f-w}, b_j\right) = F(b_j)\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f-w}, b_j\right) \overset{6.13}{=} F(b_j)l_j.$$

6.15. Folgerung.

(a) $F \equiv 1$, $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 1$ für alle Nullstellen bzw. Pole. Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz &= \sum m_j - \sum l_j \\ &= \text{Anzahl } w\text{−Stellen} - \text{Anzahl Pole} \\ &\quad \text{(einschließlich Vielfachheiten)}\end{aligned}$$

(b) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *injektiv* $\Rightarrow f : \Omega \to f(\Omega)$ ist biholomorph. Ferner sei $f(a) = w$ und $B(a,R) \subseteq \Omega$. Dann gilt

(1) $$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=R} \frac{zf'(z)}{f(z)-w}\,dz.$$

(Wähle $F(z) = z$. Die rechte Seite in (1) ist dann nach 6.14 $= a = f^{-1}(w)$.)

(c) Fundamentalsatz der Algebra $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ Polynom der Ordnung n, $a_n = 1$. Dann existiert $R > 1$ mit $|p(z)| > 1\,\forall\, z \geq R$. Es sei

(2) $$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{n}{z} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{b_k}{z^k}, \quad |z| > R,$$

mit geeigneten b_k die Laurent-Entwicklung von p'/p um ∞. Im Detail: Für $|z| > R$ ist $p'(z)/p(z)$ holomorph. Somit ist (vgl. 4.15) $w \mapsto \dfrac{p'(1/w)}{p(1/w)}$ holomorph nahe $w = 0$ hat dort also eine Potenzreihenentwicklung $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k$ mit $b_0 = 0$ und $b_1 = n$.)

$$\Rightarrow \quad n \overset{(2)}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=R}\frac{p'(z)}{p(z)}\,dz \overset{(a)}{=} \text{Anzahl der Nullstellen.}$$

6.16. Satz. Es sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$, γ geschlossener Weg mit $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \notin \Omega$. Ferner sei $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) \in \{0,1\}$ für alle $\alpha \in \Omega \setminus \operatorname{Bild}\gamma$. Setze $\Omega_1 = \{\alpha \in \Omega : \operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 1\}$.

Für $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sei N_f die Anzahl der Nullstellen von f in Ω_1, einschließlich Vielfachheit gezählt.

(a) Ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \operatorname{Bild}\gamma$, so ist für $\Gamma = f \circ \gamma$:

$$N_f = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \operatorname{Ind}_\Gamma(0),$$

(b) **Satz von Rouché.** Ist auch $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ und gilt

(1) $$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \operatorname{Bild}\gamma$$

so ist $N_f = N_g$.

(c) Es gilt sogar folgende Verallgemeinerung des Satzes von Rouché: Es seien $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$ und N_f, N_g bzw. P_f, P_g die Anzahlen der Nullstellen bzw. Pole von f bzw. g in Ω_1. Gilt

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \text{für alle } z \in \operatorname{Bild}\gamma \tag{2}$$

so ist $N_f - P_f = N_g - P_g$.

Beweis. (a) Erste Identität aus 6.15. Die zweite ist einfach:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_\Gamma(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'\circ\gamma(s)\gamma'(s)}{f\circ\gamma(s)}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz. \end{aligned}$$

(b) Aus (1) folgt, dass weder f noch g eine Nullstelle auf $\operatorname{Bild}\gamma$ hat. Nach (a)

$$\begin{aligned} \text{Anzahl der Nullstellen von } f &= \operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0) \\ \text{Anzahl der Nullstellen von } g &= \operatorname{Ind}_{g\circ\gamma}(0). \end{aligned}$$

Wegen (1) ist nun die Voraussetzung von Lemma 6.6 erfüllt, also $\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \operatorname{Ind}_{g\circ\gamma}(0)$. ◁

Gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Mengen.

6.17. Definition. Eine Folge (f_j) von Funktionen auf Ω heißt *gleichmäßig konvergent* gegen f *auf kompakten Teilmengen von* Ω, falls gilt: Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_j(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall\, j \geq j_0, z \in K.$$

6.18. Satz. *Es seien $f_j \in \mathcal{H}(\Omega)$ und (f_j) gleichmäßig kovergent gegen f auf kompakten Teilmengen von Ω. Dann gilt:*

(a) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

(b) $f_j' \to f'$ *gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von* Ω.

Beweis. (a) Mit Morera: Wir wissen, dass f als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig ist. Ist nun $\triangle$ ein abgeschlossenes Dreieck, das ganz in Ω liegt, so folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz auf $\partial\triangle$ ($\partial\triangle$ ist kompakt!), dass

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \lim_{j\to\infty}\int_{\partial\Delta} f_j(z)\,dz = 0.$$

Nach dem Satz von Morera ist also $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

(b) Nun betrachte $f_j' - f'$. Es sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann existiert ein $\rho > 0$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{a\in K} \overline{B(a,\rho)} := K_\rho \subseteq \Omega.$$

Nach der Cauchyschen Integralformel 3.5(3) gilt für $a \in K$

$$|f_j'(a) - f'(a)| \leq \frac{1}{\rho}\sup\{|f_j(w) - f(w)| : |w-a| \leq \rho\} \leq \frac{1}{\rho}\sup_{K_\rho}|f_j - f|. \tag{1}$$

Nun ist K_ρ kompakt:

$$K_\rho = \{w : \operatorname{dist}(w, K) \leq \rho\}$$

ist abgeschlossen und beschränkt. Also ist die rechte Seite in (1) endlich und unabhängig von a. Es folgt, dass $f_j' \to f'$ gleichmäßig auf K. ◁

6.19. Folgerung. Unter den obigen Voraussetzungen konvergiert $f_j^{(k)} \to f^{(k)}$ für jedes k gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω.

6.20. Satz von Hurwitz. (f_j) sei eine Funktionenfolge in $\mathcal{H}(\Omega)$, die auf jeder kompakten Teilmenge des Gebiets Ω gleichmäßig gegen eine Funktion $0 \neq f \in \mathcal{H}(\Omega)$ konvergiere. Für $a \in \Omega$ ist dann äquivalent:

(a) f hat a als Nullstelle der Ordnung m.

(b) Es gibt eine Umgebung U von a mit folgender Eigenschaft: Für jede abgeschlossene Kreisscheibe K mit $a \in \operatorname{int} K \subseteq K \subseteq U$ existiert ein $J = J(K)$ derart, dass jedes f_j mit $j \geq J$ genau m Nullstellen in K hat (einschl. Vielfachheit).

Beweis. Ist $f \neq 0$ und holomorph, so hat die Nullstellenmenge keinen Häufungspunkt in Ω. Daher existiert eine Umgebung U von a mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U \setminus \{a\}$. Wähle eine abgeschlossene Kreisscheibe K mit $a \in \operatorname{int} K \subseteq K \subseteq U$. Zu

$$\varepsilon_K := \min_{z \in \partial K} |f(z)| > 0$$

wähle J so groß, dass $|f_j(z) - f(z)| < \varepsilon_K \leq |f(z)|$ für alle $j \geq J$ und $z \in \partial K$. Dann haben nach dem Satz von Rouché f_j und f dieselbe Anzahl von Nullstellen in K. $\triangleleft$

6.21. Folgerung. Es sei (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen, die auf dem Gebiet Ω gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ konvergiere.

(a) Ist jedes f_n nullstellenfrei, so ist f nullstellenfrei oder $\equiv 0$.

(b) Ist jedes f_n injektiv, so ist f konstant oder injektiv: Für $a \in \Omega$ betrachte $\tilde{f}_n(z) = f_n(z) - f_n(a)$. Diese Funktionen sind nullstellenfrei auf $\Omega \setminus \{a\}$. Somit ist $\tilde{f} = f - f(a)$ entweder $\equiv 0$ oder nullstellenfrei. $\Rightarrow f \equiv a$ oder injektiv.

6.22. Lemma.

(a) *Es seien p, q Polynome, $q \neq 0$. Die Funktion $f = p/q$ ist meromorph auf $\mathbb{C}$ und hat in ∞ eine hebbare Singularität oder einen Pol.*

(b) *Ist umgekehrt f meromorph auf $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit endlich vielen Polen, so ist f eine rationale Funktion.*

Mit anderen Worten: Die meromorphen Funktionen auf der Riemannschen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$ sind gerade die rationalen Funktionen.

Beweis. (a) Sei $p = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$, $q = \sum_{j=0}^{m} b_j z^j$. Dann ist

$$f(1/z) = \frac{\sum a_k z^{-k}}{\sum b_j z^{-j}} \frac{z^m}{z^m} = \text{rationale Funktion nahe Null.}$$

Sie ist entweder beschränkt für $z \to 0$, oder es gilt $\lim_{z \to 0} |f(1/z)| = \infty$. Im ersten Fall haben wir eine hebbare Singularität, im zweiten einen Pol.

(b) Es seien $p_1, \ldots, p_K$ die Pole von f in $\mathbb{C}$ und

$$h_k(z) = \sum_{j=-m_k}^{-1} a_j^{(k)} (z - p_k)^j$$

die Hauptteile, $h_\infty(z) = \sum_{j=-m_\infty}^{-1} a_j^{(\infty)} 1/z^j$ der Hauptteil von f in ∞. Dann ist $g := f - \sum_{k=1}^{K} h_k - h_\infty$ holomorph auf $\mathbb{C}$ mit hebbarer Singularität in ∞. Also ist g nach Liouville konstant.

6.23. Satz von Mittag-Leffler in $\mathbb{C}$. Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise verschiedener Zahlen in $\mathbb{C}$ mit $\lim|a_k| = \infty$. Für jedes k sei p_k ein Polynom mit $p_k(0) = 0$. Dann existiert ein $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit Polstellenmenge $P_f = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ und $h_k(z) = p_k(\frac{1}{z-a_k})$ als Hauptteil in a_k.

Beweis. Ordne die (a_k) so, dass $|a_1| \le |a_2| \le \dots$ Eventuell $a_1 = 0$, aber $|a_j| > 0$ für $j \ge 2$. Für $a_k \neq 0$ hat h_k eine Taylorreihe um Null mit Konvergenzradius $|a_k|$. Zu $\varepsilon = 2^{-k}$ existiert ein $m_k \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|h_k(z) - s_{km_k}(z)| < 2^{-k}$$

für $|z| < \frac{1}{2}|a_k|$, wobei s_{km_k} die m_k-te Partialsumme der Taylorreihe ist. Setze

$$f(z) = h_1(z) + \sum_{k=2}^{\infty}(h_k(z) - s_{km_k}(z)).$$

Behauptung: Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge K von $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots\}$.

Dazu: K ist beschränkt, etwa $K \subseteq B(R, 0)$. Zu (a_k) andererseits existiert ein M mit $|a_j| > 2R$ für $j \ge M$. Damit ist

$$\sum_{k\ge M} |h_k(z) - s_{km_k}(z)| \le \sum_{k\ge M} 2^{-k} \quad \text{für } |z| \le R$$

und daher

$$f_M = \sum_{k\ge M} (h_k - s_{km_k}) \in \mathcal{H}(B(R, 0))$$

gleichmäßig konvergent.

Es folgt, dass

$$f = h_1 + \sum_{k=2}^{M-1} (h_k - s_{km_k}) + \sum_{k\ge M} (h_k - s_{km_k})$$

meromorph auf $B(R, 0)$ ist mit Polen in $a_1, \dots, a_{M-1}$ und zugehörigen Hauptteilen $h_1, \dots, h_{M-1}$. Da R beliebig war, folgt die Behauptung. ◁

6.24. Bemerkung. Der Satz lässt sich verallgemeinern auf den Fall einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und eine Folge (a_k) ohne Häufungspunkt in Ω, s. Satz 9.11.

7. Einfach zusammenhängende Gebiete

7.1. Definition. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sei offen, Γ, Γ_1 Zyklen in $\mathbb{C}$. Bekanntlich heißt Γ_1 homolog zu Γ, falls

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_{\Gamma}(z) \quad \forall\, z \notin \Omega.$$

Wir nennen Γ nullhomolog in Ω, falls

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z) = 0 \quad \forall\, z \notin \Omega.$$

Wir schreiben: $\Gamma_1 \sim \Gamma$ in Ω bzw. $\Gamma \sim 0$ in Ω.

7.2. Einfache Eigenschaften. Es sei Ω offen, γ geschlossener Weg in Ω.

(a) Ω sternförmig $\Rightarrow$ γ nullhomolog.

(b) $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ zusammenhängend $\Rightarrow$ γ nullhomolog.
(In beiden Fällen liegt z in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\setminus \mathrm{Bild}\,\gamma$.)

(c) $\sim$ ist Äquivalenzrelation

(d) $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ in $\Omega \Rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2 \sim 0$ in Ω.

(e) $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ in $\Omega \Rightarrow \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \,\forall\, f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

7.3. Beispiel. $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$

$$\gamma \sim \gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

7.4. Satz. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a_1, \ldots, a_n \in \Omega$ verschiedene Punkte, und es sei Γ Zyklus in $\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ mit $\Gamma \sim 0$ in Ω. Wähle r_j, $j = 1, \ldots, n$, so klein, dass*

$$B(a_j, r_j) \cap B(a_k, r_k) = \emptyset \quad \text{für} \quad j \neq k$$

$$B(a_j, r_j) \subseteq \Omega.$$

Definiere γ_j durch $\gamma_j(t) = a_j + r_j e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Dann gilt

$$\Gamma \sim \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\Gamma}(a_j)\,\gamma_j \quad \text{in} \quad \Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \tag{1}$$

und

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\Gamma}(a_j) \int_{\gamma_j} f(z)\,dz \tag{2}$$

für alle $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$.

Beweis. Setze $\Gamma^* = \Gamma - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\Gamma}(a_j)\,\gamma_j$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ gilt

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma^*}(z) = \underbrace{\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z)}_{\substack{=0 \\ \text{nach Voraussetzung}}} - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\Gamma}(a_j)\,\underbrace{\mathrm{Ind}_{\gamma_j}(z)}_{=0} = 0 - 0 = 0.$$

Für $z = a_k$ gilt

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma^*}(a_k) = \mathrm{Ind}_{\Gamma}(a_k) - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\Gamma}(a_j)\,\underbrace{\mathrm{Ind}_{\gamma_j}(a_k)}_{=\delta_{jk}} = 0.$$

Damit gilt (1); (2) folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz. $\triangleleft$

7.5. Definition. Eine geschlossene Kurve γ in der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt nullhomotop, falls γ homotop ist zu der „Punktkurve“ $\tilde{\gamma}(t) \equiv z_0$ für ein $z_0 \in \Omega$.

Ein Gebiet Ω heißt einfach zusammenhängend, falls jede geschlossene Kurve in Ω nullhomotop ist.

7.6. Bemerkungen.

(a) Wissen: Aus Homotopie folgt Homologie. Aus Nullhomotopie folgt Nullhomologie: Die Punktkurve hat Windungszahl Null.

(b) Jedes sternförmige Gebiet ist einfach zusammenhängend, denn man kann jede Kurve auf den Sternpunkt zusammenziehen:

$$H(t,s) = sa + (1-s)\gamma(t), \quad a : \text{Sternpunkt}.$$

(c) γ nullhomolog in $\Omega \not\Rightarrow \gamma$ nullhomotop in Γ.
Beispiel: Es sei $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, $A = -1 - i,\ B = 1 - i,\ C = 1 + i,\ D = -1 + i$ und

$$\gamma = AD + DB + BC + CD + DA + AC + CB + BA.$$

Dann ist $\mathrm{Ind}_\gamma(\frac{1}{2}) = \mathrm{Ind}_\gamma(-\frac{1}{2}) = 0$, aber γ nicht nullhomotop.

7.7. Lemma. *In einem einfach zusammenhängenden Gebiet gelten der Cauchysche Integralsatz bzw. der Residuensatz für jeden geschlossenen Weg.*

Beweis. Dort ist jeder geschlossene Weg nullhomolog, also die Voraussetzung von Satz 6.2 erfüllt. ◁

7.8. Satz. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist äquivalent*

(i) *Jeder geschlossene Weg in Ω ist nullhomolog,*

(ii) $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ *ist zusammenhängend.*

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i) 7.2(b).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Indirekt. Annahme: $C := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ist unzusammenhängend. Dann existieren disjunkte offene Mengen $A, B \neq \emptyset$ in $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ derart, dass

$$A \cup B \ = \ C.$$

Der Punkt ∞ liegt in genau einer der Mengen A oder B, da $\infty \notin \Omega$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $\infty \in B$. Eine Umgebung von ∞ liegt in B, schneidet also A nicht. Da eine Umgebung von ∞ eine Teilmenge der Form $\{|z| > R\}$ für ein $R > 0$ enthält, ist also $A \subseteq \{|z| \leq R\}$ und somit beschränkt.

Andererseits ist A auch abgeschlossen in $\mathbb{C}$: Die Menge $C = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ist abgeschlossen in $\overline{\mathbb{C}}$, während B eine offene Teilmenge von C ist. Somit ist

$$A = C \setminus B = (\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega) \setminus B$$

abgeschlossen in $\overline{\mathbb{C}}$ und $\subseteq \mathbb{C}$, somit abgeschlossen in $\mathbb{C}$. Damit ist A kompakt. Genauso sieht man: Die Menge $B \setminus \{\infty\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{C}$. (Dazu: $B = C \setminus A = (\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega) \setminus A$ ist abgeschlossen in $\overline{\mathbb{C}}$, daher ist $B \setminus \{\infty\} = B \cap \mathbb{C}$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$.) Da $A \cap B = \emptyset$ ist, folgt

$$r := \mathrm{dist}(A, B \setminus \{\infty\}) > 0.$$

Nun sei Q Quadratgitternetz in $\mathbb{C}$ der Seitenlänge $r/2$, bestehend aus den Rändern abgeschlossener Quadrate W in $\mathbb{C}$. Setze

$$Q_A := \{W \in Q : W \cap A \neq \emptyset\}.$$

Diese Menge ist endlich, da A kompakt ist. Ferner enthält A mindestens einen Punkt z_0. Indem man gegebenenfalls das Gitternetz etwas verschiebt, kann man annehmen, dass für genau ein $W_0 \in Q_A$ gilt $z_0 \in \overset{\circ}{W}_0$. Es sei ∂W_0 der positiv orientierte Rand von W_0. Dann gilt

$$\mathrm{Ind}_{\partial W_0}(z_0) = 1, \quad \text{und} \quad \mathrm{Ind}_{\partial \tilde{W}}(z_0) = 0$$

für jedes andere Quadrat $\tilde{W}$ nach 7.2(a).

Setze $\gamma := \sum_{W \in Q_A} \partial W$. Dann schneidet γ die Menge B nicht nach Definition von r.

Ist S Seite eines Quadrats, für die $S \cap A \neq \emptyset$ ist, so gehört S auch zu einem anderen Quadrat in Q_A und ist als dessen Seite genau entgegengesetzt orientiert.

Setze also (eigentlich muss man genauer begründen, wieso sich dabei ein Zyklus ergibt; das (eigentlich graphentheoretische Argument findet man in Rudin, RCA, 13.4)

$$\gamma^* := \sum_{\substack{S \text{ Seite eines Quadrats in } Q_A \\ S \cap A = \emptyset}} S.$$

Da für γ^* nur doppelt und im entgegengesetzten Sinn durchlaufene Seiten weggelassen wurden, ist $\mathrm{Ind}_{\gamma^*}(z_0) = \mathrm{Ind}_{\gamma}(z_0) = 1$ und γ^* liegt ganz in Ω. Also ist γ^* nicht nullhomolog. Widerspruch! $\lhd$

7.9. Folgerung. Es sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann ist $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ zusammenhängend, denn jeder geschlossene Weg ist nullhomotop, somit nullhomolog.

Wir werden zeigen, dass auch die Umkehrung gilt.

7.10. Lemma. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und U homöomorph zu Ω. Dann ist U einfach zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $\alpha : U \to \Omega$ eine Homöomorphismus, $\gamma : [0,1] \to U$ stetige geschlossene Kurve. Dann ist $\alpha \circ \gamma : [0,1] \to \Omega$ ebenfalls stetige geschlossene Kurve, also nullhomotop. Sei H die Homotopie. Dann ist $\alpha^{-1} \circ H \in C([0,1] \times [0,1], U)$ eine Homotopie von γ auf einen Punkt, somit γ nullhomotop.

7.11. Folgerung. Jedes zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ homöomorphe Gebiet in $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

Umgekehrt werden wir zeigen: Ist $\Omega \neq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, so ist Ω biholomorph auf $\mathbb{E}$ abbildbar (Riemannscher Abbildungssatz).

7.12. Satz. (Lemma von Schwarz). Es sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{E})$ mit $f(\mathbb{E}) \subseteq \mathbb{E}, f(0) = 0$. Dann ist entweder $f(z) = e^{i\alpha} z$ für ein $\alpha \in [0, 2\pi[$ oder $|f(z)| < |z| \, \forall \, z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ und $|f'(0)| < 1$.

Beweis. Setze

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases} \in \mathcal{H}(\mathbb{E}), \text{ (weil } f(0) = 0!).$$

Nach Annahme ist $|f(z)| < 1$. Für $|z| = r < 1$ ist also $|g(z)| < 1/r$, also gilt nach dem Maximumprinzip auch $|g(z)| < 1/r \; \forall |z| < r$. Für $r \to 1$ folgt $|g(z)| \leq 1$, also $|f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$.

Falls nun ein $z_0 \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ existiert mit $|f(z_0)| = |z_0|$ oder falls $|f'(0)| = 1$ ist, so nimmt die Funktion g ihr Maximum in z_0 an, ist daher konstant $\equiv C$ mit $|C| = 1$. $\lhd$

8. Der Satz von Montel und der Riemannsche Abbildungssatz

Im Folgenden sei U stets eine offene Menge in $\mathbb{C}$.

Eine Metrik für $C(U)$.

8.1. Erinnerung. Setze $K_j = \{z \in U : |z| < j \text{ und } \operatorname{dist}(z, \partial U) > 1/j\}, j = 1, 2, \ldots$. Dies liefert eine Folge beschränkter offener Mengen mit

(a) $K_1 \subseteq \overline{K}_1 \subseteq K_2 \subseteq \overline{K}_2 \subseteq \ldots \subseteq U$.
(b) $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = U$.
(c) Ist $K \subseteq U$ kompakt, so existiert ein n_0 mit $K \subseteq K_{n_0}$.

8.2. Definition. Es sei $f \in C(U)$. Wir setzen

$$\|f\|_j := \sup\{|f(z)| : z \in K_j\}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

und definieren auf $C(U)$ eine Metrik d durch

$$d(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f - g\|_j}{1 + \|f - g\|_j}.$$

Dies ist eine Metrik:
Klar: $d(f, f) = 0$, und $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$; ferner ist $d(f, g) = d(g, f)$. Die Dreiecksungleichung folgt, weil $x \mapsto x/(1 + x)$ monoton wächst mit der Ungleichung

$$\frac{a + b}{1 + a + b} \leq \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b}, \quad a, b \geq 0.$$

Es gilt dann für $f, g, h \in C(U)$ und jedes j

$$\frac{\|f - h\|_j}{1 + \|f - h\|_j} \leq \frac{\|f - g\|_j + \|g - h\|_j}{1 + \|f - g\|_j + \|g - h\|_j} \leq \frac{\|f - g\|_j}{1 + \|f - g\|_j} + \frac{\|g - h\|_j}{1 + \|g - h\|_j},$$

und somit $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$.

8.3. Lemma. *Eine Folge konvergiert in dem metrischen Raum $(C(U), d)$ genau dann, wenn sie auf jeder kompakten Menge gleichmäßig konvergiert.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} d(f_n, f) \to 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \|f_n - f\|_j \to 0 \quad \forall j \quad \Leftrightarrow \quad f_n \to f \text{ gleichmäßig auf } K_j \quad \forall j \\ &\Leftrightarrow \quad f_n \to f \text{ gleichmäßig auf jeder kompakten Menge } K. \end{aligned}$$

◁

8.4. Satz. *$(C(U), d)$ ist vollständiger metrischer Raum; $(\mathcal{H}(U), d)$ ist abgeschlossener Unterraum.*

Beweis. (Bekannt) Es sei (f_n) eine Cauchyfolge in $C(U)$, d. h. $d(f_n, f_m) \to 0$ für $m, n \to \infty$. Dann ist insbesondere $(f_n(z))$ eine Cauchyfolge für jedes $z \in U$. Wir können also $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ definieren, da $\mathbb{C}$ vollständig ist.

Zeige: f ist stetig. Sei $z_0 \in U, \varepsilon > 0$. Es gibt ein j mit $z_0 \in K_j$. Dann existiert ein N mit

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, z \in K_j,\ n, m \geq N.$$

Insbesondere ist also $|f(z) - f_N(z)| \leq \varepsilon/3$ für alle $z \in K_j$. Ferner existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f_N(z) - f_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, |z - z_0| < \delta, \text{ da } f_N \text{ stetig.}$$

Es folgt

$$|f(z) - f(z_0)| \le |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

falls $z \in K_j$, $|z - z_0| < \delta$.

Nun sei (f_n) Folge in $\mathcal{H}(U)$, $f_n \to f$ bezüglich d. Dann ist f nach Satz 6.18 holomorph. ◁

Der folgende Satz ist i.wstl. Satz 14.13 aus Analysis II.

8.5. Satz. *Für eine Teilmenge K eines metrischen Raums (X, d) ist äquivalent:*

(i) *K ist kompakt.*

(ii) *Jede Folge in K hat eine (in K) konvergente Teilfolge.*

(iii) *K ist vollständig und total beschränkt (d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Menge von Kugeln vom Radius ε, die K überdeckt).*

Beweis. (i)⇒ (ii): Angenommen, dies wäre nicht so. Dann gäbe es zu jedem $x \in K$ eine Umgebnung, in der nur endlich viele Folgenglieder liegen. Die Vereinigung dieser Umgebungen überdeckt K. Also gibt es auch eine endliche Teilüberdeckung. Somit liegen in K nur endlich viele Folgenglieder. Widerspruch!

(ii) ⇒ (iii) Angenommen, es gäbe ein $\varepsilon > 0$ so, dass K nicht von endlich vielen ε-Kugeln überdeckt wird. Dann konstruieren wir eine Folge: Der Punkt x_1 ist beliebig, $x_2 \in K \setminus B(x_1, \varepsilon)$, allgemein $x_k \in K \setminus (B(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_{k-1}, \varepsilon)$. In der entstehenden Folge (x_k) haben alle Glieder Abstand $\ge \varepsilon$. Sie hat also keine konvergente Teilfolge. Widerspruch!

(iii)⇒ (i) Angenommen, es gebe eine offene Überdeckung U_i, $i \in I$, von K ohne endliche Teilüberdeckung. Zu $\varepsilon = 2^{-n}$ wähle jeweils endlich viele Kugeln vom Radius 2^{-n}, die K überdecken.

Wir finden unter allen Kugeln vom Radius $1/2$ eine, die von keiner endlichen Teilüberdeckung von U_i überdeckt wird. Dies sei K_1.

Sind Kugeln $K_1, \ldots, K_n$ gewählt, so bestimmen wir K_{n+1} wie folgt: Die obigen Kugeln vom Radius $2^{-(n+1)}$ überdecken auch K_n. Unter all denen, die mit K_n nichtleeren Schnitt haben, gibt es (mindestens) eine, die keine endliche Teilüberdeckung durch Mengen aus U_i hat. Wir nennen sie K_{n+1}.

Nun sei x_n der Mittelpunkt von K_n. Da K_j und K_{j+1} nichtleeren Schnitt haben, ist $d(x_j, x_{j+1}) < 2^{-j} + 2^{-j-1} < 2^{-j+1}$. Es folgt, dass (x_j) Cauchy-Folge ist und somit wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit von K einen Grenzwert $x \in K$ hat. Dieser liegt in einer der Mengen U_i, etwa in U_{i_0}. Dann existiert auch eine Kugel $B(x, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$. Wähle n so groß, dass $2^{-n} < \varepsilon/2$ und $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ ist. Dann folgt $x \in K_n$, somit $K_n \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$ im Widerspruch dazu, dass K_n keine endliche Teilüberdeckung durch die U_i hat. ◁

Die Sätze von Arzelà-Ascoli und Montel.

8.6. Definition. Es sei $\mathcal{F} \subseteq C(U)$, $K \subseteq U$.

(a) $\mathcal{F}$ heißt relativ-kompakt, falls der Abschluss $\overline{\mathcal{F}}$ kompakt ist. Äquivalent: Jede Folge in $\mathcal{F}$ hat eine (in $\overline{\mathcal{F}} \subseteq C(U)$) konvergente Teilfolge.

(b) $\mathcal{F}$ heißt gleichmäßig beschränkt auf K, falls ein $c = c_K$ existiert mit $|f(z)| \le c_K$ für alle $z \in K$, $f \in \mathcal{F}$.

(c) $\mathcal{F}$ heißt punktweise beschränkt auf U, falls für jedes $z \in U$ und alle $f \in \mathcal{F}$ ein $c_z \ge 0$ existiert mit $|f(z)| \le c_z$ für alle $f \in \mathcal{F}$.

(d) $\mathcal{F}$ heißt gleichgradig stetig auf K, falls gilt $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon\, \forall\, z_1, z_2 \in K$ mit $|z_1 - z_2| < \delta$.

8.7. Satz von Arzelà-Ascoli. Es sei $\mathcal{F} \subseteq C(U)$. Dann ist äquivalent:

(i) $\mathcal{F}$ ist punktweise beschränkt und auf jeder kompakten Teilmenge von U gleichgradig stetig.

(ii) $\mathcal{F}$ ist relativ kompakt.

Beweis. (ii)⇒ (i): Annahme: Es gibt eine kompakte Teilmenge K von U und eine Folge $(f_j) \subseteq \mathcal{F}$ mit $\|f_j\|_K \geq j$. Dann hat (f_j) keine konvergente Teilfolge. Widerspruch!

Annahme (f_j) nicht gleichgradig stetig auf K. Dann existiert $\varepsilon_0 > 0$, so dass für $\delta_j = 1/j$ eine Funktion f_j existiert und $z_{1j}, z_{2j} \in K$ mit $|z_{1j} - z_{2j}| < 1/j$, $|f_j(z_{1j}) - f_j(z_{2j})| \geq \varepsilon_0$.

Nach Annahme hat (f_j) eine konvergente Teilfolge, etwa $f_j \to f$. Für $j \geq j_0$ ist dann $\|f_j - f\|_K \leq \varepsilon_0/4$. Wegen der Stetigkeit von f existiert $j : |f(z_{1j}) - f(z_{2j})| < \varepsilon_0/4$. Es folgt

$$\varepsilon_0 \leq |f_j(z_{1j}) - f_j(z_{2j})| \leq 2\,\|f - f_j\| + \|f(z_{1j}) - f(z_{2j})\| < \frac{3}{4}\varepsilon_0 \quad \text{Widerspruch!}$$

(i)⇒(ii) Es sei (f_k) eine Folge in $\mathcal{F}$. Wähle eine dichte, abzählbare Teilmenge $D = \{z_1, z_2, \ldots\}$ von U, etwa $D = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Die Folge $(f_k(z_1))_k$ ist beschränkt und hat daher eine komapkte Teilfolge; wir nennen sie f_{1l}. Die Folge $(f_{1l}(z_2))_l$ ist ebenfalls beschränkt und hat wiederum eine konvergente Teilfolge, (f_{2l}). Iterativ erhalten wir eine Folge von Folgen (f_{jl}) mit der Eigenschaft, dass die Folge $(f_{jl})_l$ für $z_1, \ldots, z_j$ konvergiert.

Wir betrachten dann die sogenannte *Diagonalfolge* $g_k = f_{kk}$ und zeigen, dass sie eine Cauchy-Folge ist (wegen der Vollständigkeit von $C(U)$ hat sie dann automotisch einen Grenzwert).

Es sei $K \subseteq U$ kompakt und $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit von $\mathcal{F}$ existiert ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon/3 \quad f \in \mathcal{F}, \quad |w - z| < \delta.$$

Nun finden wir ein N so, dass

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B(z_j, \delta).$$

Nun wählen wir k_0 so groß, dass

$$|g_k(z_j) - g_l(z_j)| < \varepsilon/3 \quad \text{für } k, l \geq k_0, j = 1, \ldots, N.$$

Ist nun $z \in K$, so existiert ein j mit $z \in B(z_j, \delta)$. Dann ist für $k, l \geq k_0$

$$|g_k(z) - g_l(z)| \leq |g_k(z) - g_k(z_j)| + |g_k(z_j) - g_l(z_j)| + |g_l(z_j) - g_l(z)| < \varepsilon.$$

Daher ist (g_k) Cauchy-Folge. ◁

8.8. Satz von Montel. *Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(U)$. Dann ist $\mathcal{F}$ genau dann relativ kompakt, wenn $\mathcal{F}$ auf jeder kompakten Teilmenge gleichmäßig beschränkt ist.*

Statt von relativ-kompakten Mengen (bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen) spricht man hier auch von *normalen Familien.*

Beweis. „⇒“ folgt wie im Beweis von 8.7, da $\mathcal{H}(U) \subseteq C(U)$.

„⇐“ Nach Arzelà-Ascoli ist nur zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig auf jeder kompakten Teilmenge von U ist.

Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq K_n \subseteq K_{n+1}$. Dann gilt

(i) $\exists\, r > 0 : B(z, r) \subseteq K_{n+1}\, \forall\, z \in K$ und

(ii) $\exists\, M > 0 : |f(z)| \leq M\, \forall\, z \in K$.

Ist nun $\varepsilon > 0$ vorgelegt, so wähle $\delta < \min\left\{\frac{r}{2}, \varepsilon\frac{r}{2M}\right\}$. Dann können wir für $z_1, z_2 \in K$ mit $|z_1 - z_2| < \delta$ Cauchys Integralformel anwenden. Da z_2 in $B(z_1, r)$ liegt, und der Betrag des Integrals durch die Weglänge mal dem Supremum des Betrags des Integranden auf dem Weg abgeschätzt werden kann, folgt mit der Identität $u^{-1} - v^{-1} = u^{-1}(v-u)v^{-1}$

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{|w-z_1|=r} f(w)\left(\frac{1}{w-z_1} - \frac{1}{w-z_2}\right) dw\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \sup\{|f(w)| : |w-z_1| = r\} \cdot \frac{1}{r} \cdot |z_1 - z_2| \cdot \frac{1}{r/2} \\ &\leq \frac{2M}{r}\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

◁

Der Riemannsche Abbildungssatz.

8.9. Lemma. *Für $a \in \mathbb{E}$ betrachte die Abbildung*

$$\mu_a : z \mapsto \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

Es gilt:

(i) $\mu_a \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{a}}\})$
(ii) $(\mu_a)^{-1} = \mu_{-a}$
(iii) $\mu_a'(0) = 1 - |a|^2$
(iv) $\mu_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$
(v) $\mu_a(\partial\mathbb{E}) = \partial\mathbb{E}$
(vi) $\mu_a(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$
(vii) $\mu_a(a) = 0$

Beweis. Vergleiche Übung.

(i) klar. (ii) Nachrechnen. (iii), (iv): Es ist $\mu_a'(z) = \frac{1-\overline{a}z+\overline{a}(z-a)}{(1-\overline{a}z)^2}$.

(v): Ist $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, so ist

$$|\mu_a(e^{i\varphi})| = \left|\frac{e^{i\varphi}-a}{1-\overline{a}e^{i\varphi}}\right| = \left|\frac{1}{e^{i\varphi}}\right| \left|\frac{e^{i\varphi}-a}{e^{-i\varphi}-\overline{a}}\right| = 1.$$

Damit: $\mu_a : \partial\mathbb{E} \to \partial\mathbb{E}$. Ferner $(\mu_a)^{-1}(\partial\mathbb{E}) = \mu_{a^{-1}}(\partial\mathbb{E}) \subseteq \partial\mathbb{E}$, also gilt (v).

(vi) Es ist $\mu_a(\mathbb{E}) \subseteq \mathbb{E}$ nach Maximumprinzip und (v) ebenso $\mu_a^{-1}(\mathbb{E}) = \mu_{-a}(\mathbb{E}) \subseteq \mathbb{E} \Rightarrow$ (vi).

(vii) klar. ◁

8.10. Bemerkung. Es gibt keine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{E}$ (Liouville), es gibt jedoch homöomorphe:

$$\varphi(z) = \frac{z}{1+|z|}.$$

8.11. Satz. *Es sei $a \in \mathbb{E}$ und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ biholomorph mit $f(a) = 0$. Dann ist*

$$f(z) = e^{i\varphi}\mu_a(z)$$

für ein $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Beweis. Da $\mu_{-a}(0) = a$, ist $g = f \circ \mu_{-a} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ biholomorph mit $g(0) = 0$. Ist h die Inverse zu g, d. h. $g \circ h = \mathrm{id}$, so gilt

$$1 = |\mathrm{id}'(0)| = |(g \circ h)'(0)| = |g'(h(0))h'(0)| = |g'(0)|\,|h'(0)|.$$

Nach dem Lemma von Schwarz 7.12 sind aber $|g'(0)|$ und $|h'(0)|$ beide ≤ 1. Es folgt $|g'(0)| = |h'(0)| = 1$, also, wieder nach dem Lemma von Schwarz, $g(z) = e^{i\varphi}z$. ◁

8.12. Bemerkung. Es sei $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f, g : \Omega \to \mathbb{E}$ biholomorph mit $f(z_0) = g(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in \Omega$. Dann haben wir

$$\left.\begin{array}{ccccc} \mathbb{E} & \overset{g^{-1}}{\to} & \Omega & \overset{f}{\to} & \mathbb{E} \\ 0 & \mapsto & z_0 & \mapsto & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ f \circ g^{-1} = e^{i\varphi}\mathrm{id}.$$

Sind $f'(z_0), g'(z_0) \in \mathbb{R}_+$, so folgt $\varphi = 0$ mit der Kettenregel.

Das folgende Lemma ist zentral für den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes.

8.13. Lemma. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $f(z) \neq 0\,\forall\, z \in \Omega$. Dann existiert eine holomorphe Quadratwurzel zu f, d.h. es gibt ein $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $g^2 = f$.*

Beweis. In Ω ist jeder geschlossene stetige Weg nullhomotop, also auch nullhomolog. Es folgt, dass $\int_\gamma h(z)\,dz = 0$ für jede holomorphe Funktion h auf Ω. Dann hat jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion, vgl. 2.23. Ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nullstellenfrei, so ist $f'/f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Ist F eine Stammfunktion zu f'/f, so ist $d/dz(fe^{-F}) = 0$, also $f = ce^F$ für ein $c \neq 0$. Setze $g(z) = c^{1/2}e^{F(z)/2}$. ◁

8.14. Riemannscher Abbildungssatz. *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $\Omega \neq \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ ist biholomorph abbildbar auf dem Einheitskreis $\mathbb{E}$.*

Bemerkung: Statt einfach zusammenhängend benötigt man nur, dass Ω ein Gebiet ist und jede nullstellenfreie Funktion auf Ω eine holomorphe Quadratwurzel hat.

Beweis. 1. *Schritt.* Es gibt ein injektives $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $F(\Omega) \subset \mathbb{E}$ und $F(\Omega) \ni 0$. Insbesondere ist dann $F : \Omega \to F(\Omega)$ biholomorph. Also gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $\Omega \subseteq \mathbb{E}$ und $0 \in \Omega$.

Dazu: Wähle $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Nach Lemma 8.13 existiert ein $q \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $q^2(z) = z - a$ für alle $z \in \Omega$. Wir zeigen zuerst, dass q injektiv ist: Ist $q(z_1) = q(z_2)$, so ist

$$z_1 - a = q(z_1)^2 = q(z_2)^2 = z_2 - a,\ \text{also } z_1 = z_2.$$

Ferner ist $q(z_1) \neq -q(z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \Omega$. Ist nämlich $q(z_1) = -q(z_2)$, so ist

$$z_1 - a = q(z_1)^2 = q(z_2)^2 = z_2 - a,\ \text{also } z_1 = z_2.$$

Daher ist $q(z_1) = q(z_2) \neq -q(z_2)$, denn $q(z_2) \neq 0$, weil $z - a \neq 0$.

Es sei nun $c \in q(\Omega)$. Dann ist $c \neq 0$. Da $q(\Omega)$ offen ist, existiert ein $r > 0$ mit $B(c, r) \subseteq q(\Omega)$.

Wir zeigen, dass $B(-c, r) \cap q(\Omega) = \emptyset$: Wäre $w \in B(-c, r) \cap q(\Omega)$, so existierte ein $z \in \Omega$ mit

$$w = q(z) \in B(-c, r) = -B(c, r) \subseteq -q(\Omega).$$

Folglich gäbe es ein $z' \in \Omega$ mit $q(z) = -q(z')$ im Widerspruch zum Obigen.

Wir setzen nun

$$\tilde{f}(z) = \frac{r}{q(z) + c} : \Omega \to \mathbb{C}.$$

Dann ist $\tilde{f}$ injektiv, da q injektiv ist. Es ist außerdem $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, weil der Nenner nicht Null wird. Schließlich ist $|q(z) - (-c)| > r$, also $|\tilde{f}(z)| < 1$ und somit

$$\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{E} \text{ injektiv.}$$

Zu beliebigem $z_0 \in \Omega$ setze

$$F(z) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z_0)\right).$$

Dann ist $F : \Omega \to \mathbb{E}$ holomorph und injektiv mit $F(z_0) = 0$. Da F nichtkonstant ist, ist auch $F(\Omega)$ offen nach dem Satz von der offenen Abbildung, Satz 5.5, und F^{-1} ist holomorph nach 5.2. Damit haben wir eine biholomorphe Abbildung $\Omega \to F(\Omega) \subseteq \mathbb{E}$ mit $F(z_0) = 0$.

2. *Schritt.* Sei also $\Omega \subseteq \mathbb{E}$ und $0 \in \Omega$. Betrachte

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \to f(\Omega) \subseteq \mathbb{E} : f \text{ biholomorph, } f(0) = 0\}.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ nicht leer, da $\mathrm{id}_\Omega \in \mathcal{F}$. $(*)$

Setze nun

$$\alpha := \sup\{|f'(0)| : f \in \mathcal{F}\}.$$

(i) Es ist $1 \leq \alpha < \infty$: Wegen $(*)$ ist $\alpha \geq 1$. Mit der Cauchyschen Integralformel ist

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,r)} \frac{f(z)}{z^2}\, dz,$$

falls $\overline{B(0,r)} \subset \Omega$. Also gilt

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r} \quad \forall\, f \in \mathcal{F}$$

und somit ist $\alpha \leq 1/r < \infty$.

(ii) Es existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ mit $\lim_{n\to\infty} |f_n'(0)| = \alpha$. Da $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt ist auf jeder kompakten Teilmenge von Ω (sogar auf ganz Ω), ist $\mathcal{F}$ relativ kompakt nach dem Satz von Montel. Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass (f_n) gegen ein f in $\mathcal{H}(\Omega)$ konvergiert. Dann

(1) $f_n' \to f'$ in $\mathcal{H}(\Omega)$ (Satz 6.18), also ist $|f'(0)| = \alpha \geq 1$, und daher f nicht konstant.

(2) $|f(z)| \leq 1\, \forall\, z \in \Omega$, also $f(\Omega) \subset \mathbb{E}$ wegen des Maximumprinzips,

(3) $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.

Nach der Folgerung aus dem Satz von Hurwitz 6.21 ist $f : \Omega \to \mathbb{E}$ injektiv, also $f \in \mathcal{F}$.

3. *Schritt.* Das in (ii) konstruierte f ist auch surjektiv: Für $b \in \mathbb{C}$ setze

$$\mu_b(z) := \frac{z - b}{1 - \bar{b}z} \qquad \text{(vgl. 8.9).}$$

Angenommen, f ist nicht surjektiv. Dann gibt es

$$0 \neq a \in \mathbb{E} \setminus f(\Omega).$$

Es ist $\mu_a \circ f : \Omega \to \mathbb{E} \setminus \{0\}$ holomorph und injektiv, und $(\mu_a \circ f)(0) = -a \neq 0$. Sei nun w eine holomorphe Quadratwurzel zu $\mu_a \circ f$, also $w^2 = \mu_a \circ f$. Aus der Injektivität von $\mu_a \circ f$ folgt, dass w injektiv ist. Setzt man nun

$$g := \mu_{w(0)} \circ w,$$

so ist

(1) $g : \Omega \to \mathbb{E}$ holomorph und injektiv.

(2) $g(0) = \mu_{w(0)}(w(0)) = 0$.

Es folgt, dass $g \in \mathcal{F}$.

Nun zeigen wir, dass $|g'(0)| > |f'(0)|$ ist und erhalten einen Widerspruch. Dazu setze (wobei z^2 die Funktion $z \mapsto z^2$ bezeichnet)

$$h(z) = \mu_{-a}(\mu_{-w(0)}(z)^2) = \mu_{-a} \circ z^2 \circ \mu_{-w(0)}.$$

Dann ist $h \circ g = \mu_{-a} \circ z^2 \circ \mu_{-w(0)} \circ \mu_{w(0)} \circ w = f$, also

$$f'(0) = (h \circ g)'(0) = h'(g(0))g'(0) = h'(0)g'(0).$$

Nun ist $h : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph, $h(0) = h(g(0)) = f(0) = 0$ und h ist *nicht* bijektiv. Nach dem Lemma von Schwarz (7.12) ist daher $|h'(0)| < 1$. Dann gilt aber $|g'(0)| > |f'(0)|$. ◁

8.15. Satz. *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, so sind äquivalent:*

(a) *Ω ist homöomorph zu $\mathbb{E}$.*

(b) *Ω ist einfach zusammenhängend.*

(c) *$\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ist zusammenhängend.*

(d) *Jeder geschlossene Weg ist nullhomolog.*

(e) *Für jeden (stückweise stetig differenzierbaren) geschlossenen Weg γ in Ω und jedes $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ist*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

(f) *Jedes $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ hat eine Stammfunktion.*

(g) *Jedes nullstellenfreie $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ hat eine holomorphe Logarithmusfunktion.*

(h) *Jedes nullstellenfreie $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ hat eine holomorphe Quadratwurzel.*

Beweis: (a) ⇒ (b) 7.10.

(b) ⇒ (c) 7.9.

(c) ⇒ (d) 7.8.

(d) ⇒ (e) 6.2.

(e) ⇒ (f) 2.23.

(f) ⇒ (g) F sei eine Stammfunktion zu f'/f. Dann ist $e^F/f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit Ableitung 0. Also ist $e^F/f = c$ konstant mit $c \neq 0$, das $e^F \neq 0$. Wähle $d \in \mathbb{C}$ mit $e^d = c$. Dann ist $e^{F(z)-d} = f(z)$. Also ist $F - d$ ein Logarithmus zu f.

(g) ⇒ (h) Wähle $f = \exp(\frac{1}{2}\log g)$.

(h) ⇒ (a) folgt aus dem Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes (vgl. Bemerkung), falls $\Omega \neq \mathbb{C}$; für $\Omega = \mathbb{C}$ setze $\varphi(z) = \frac{z}{1+|z|}$.

8.16. Bemerkung. Für nicht-einfach zusammenhängendes Gebiete kann man keine analoge Fassung des Riemannschen Abbildungssatzes erwarten. Dies zeigt folgender Satz.

Satz. (Siehe Rudin. *Real- and Complex Analysis*. Theorem 14.22). Es sei U_{rR} der Kreisring

$$U_{rR} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}, \quad 0 < r < R < \infty.$$

Dann gilt: Es gibt eine biholomorphe Abbildung

$$\varphi : U_{r_1R_1} \to U_{r_2R_2}$$

genau dann wenn $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

Dabei ist „⇐“ trivial: Setze $\varphi(z) = \frac{r_2}{r_1}z$.

8.17. Bemerkung. Ist Ω beschränkt und ist der Rand von Ω hinreichend regulär, so hat die biholomorphe Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{E}$ eine Fortsetzung zu einem Homöomorphismus $\overline{f} : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{E}}$. Dabei gilt $\overline{f}(\partial\Omega) = \partial\mathbb{E}$. Siehe: Rudin, *Real- and Complex Analysis*, Theorem 14.19.

9. Die Sätze von Runge und Mittag-Leffler: Der Weierstrasssche Produktsatz

Der Approximationssatz von Runge. Eine Funktion $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ soll auf einem Kompaktum $K \subseteq \Omega$ gleichmäßig durch rationale Funktionen R approximiert werden. Diese sind dann von der Form

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ mit teilerfremden Polynomen } P, Q, Q \neq 0$$

bzw.

$$R(z) = \sum_{j=1}^{N} P_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right) + P_0(z),$$

wobei $P_0, \ldots, P_N$ Polynome sind (Partialbruchzerlegung).

Im Folgenden sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $K \subseteq \Omega$.

Wir benötigen folgende Aussage, die sofort klar ist:

9.1. Lemma. *Die Polynome sind gerade diejenigen rationalen Funktionen, die keine Pole in $\mathbb{C}$ haben (d.h. deren Pole bzgl. $\overline{\mathbb{C}}$ höchstens in ∞ liegen).*

Beweis. "$\Rightarrow$" offensichtlich.
"$\Leftarrow$" Schreibe $R = P/Q$ mit teilerfremden Polynomen P, Q. Dann sind die Pole von R gerade die Nullstellen von Q (und ggf. der Punkt $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$). $\lhd$

9.2. Lemma. *Es gibt es einen (stückweise stetig differenzierbaren) Zyklus Γ in $\Omega \setminus K$, so dass für jedes $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dz, \quad z \in K.$$

Beweis. Im Beweis von 7.8 haben wir einen Weg konstruiert, der nullhomolog bzgl. Ω ist und Windungszahl 1 für jedes Element von K hat. Dann folgt die Formel aus dem Satz von Cauchy. $\lhd$

9.3. Satz. *Es sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine rationale Funktion R mit Polen (höchstens) in $\mathbb{C} \setminus K$ und*

$$|f(z) - R(z)| < \varepsilon, \quad z \in K.$$

Beweis. Wähle Γ wie in 9.2. Wir approximieren geschickt das Cauchy-Integral aus 9.2: Die durch

$$g(w, z) = \frac{f(w)}{w - z}$$

definierte Funktion $g : \Gamma \times K \to \mathbb{C}$ ist stetig, also (weil $\Gamma \times K$ kompakt) gleichmäßig stetig. Folglich existiert zu ε ein $\delta > 0$ mit

$$\big|g(w, z) - g(w', z)\big| < \frac{2\pi\varepsilon}{\text{Länge}\,\Gamma} \quad \text{falls } |w - w'| < \delta.$$

Wir unterteilen nun Γ in Teilstücke Γ_j der Länge $< \delta$ und wählen $w_j \in \Gamma_j$. Dann gilt

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} g(w, z)\, dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} g(w_j, z)\, dw\right| < \frac{\text{Länge}\,\Gamma_j}{\text{Länge}\,\Gamma}\ \varepsilon.$$

Durch

$$R(z) = \sum_j \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} g(w_j, z)\, dw = \sum_j \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} f(w_j)\, dw\right)\frac{1}{w_j - z}$$

definieren wir eine rationale Funktion mit Polen in den w_j, also im Komplement von K.

Mit der Cauchy-Formel aus 9.2 folgt die Abschätzung:

$$|f(z) - R(z)| = \frac{1}{2\pi} \sum_j \left| \int_{\Gamma_j} g(w,z) - g(w_j,z)\, dw \right| < \varepsilon.$$

◁

Manchmal ist man daran interessiert, die Pole in einer besonderen Lage wählen zu können. Das ist i.Allg. nicht möglich, s. 9.9 unten. Es gilt jedoch

9.4. Polverschiebung. Es sei $M \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und γ eine (stückweise stetig differenzierbare) Kurve, die M nicht schneidet. Wir nennen die Anfangs- bzw. Endpunkte z_1 und z_2. Dann gibt es zu jedem Polynom P und jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom Q so, dass

$$\left| P\left(\frac{1}{z-z_1}\right) - Q\left(\frac{1}{z-z_2}\right) \right| < \varepsilon, \quad z \in M.$$

Beweis. Es gibt ein $\delta > 0$ mit $\operatorname{dist}(\gamma, z) \geq 2\delta > 0$ für alle $z \in M$. Wir wählen nun Punkte $z_1 = \zeta_0, \ldots, \zeta_N = z_2$ auf γ mit

$$|\zeta_j - \zeta_{j+1}| < \delta, \quad j = 1, \ldots, N-1.$$

Da $(z-z_1)^{-1}$ in dem Kreisring $U_{\delta,\infty} = \{z : |z - \zeta_1| > \delta\}$ holomorph ist, haben wir die Laurent-Reihe (vgl. 4.13)

$$(z-z_1)^{-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-\zeta_1)^k,$$

die für $|z - \zeta_1| > \delta$ konvergiert. Dabei ist

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-\zeta_1|=\rho} \frac{(z-z_1)^{-1}}{(z-\zeta_1)^{k+1}}\, dz$$

für beliebiges $\rho > \delta$, also $c_k = 0$ für $k \geq 0$ (Integrand geht mindestens wie ρ^{-2} gegen Null, Kurvenlänge ist $2\pi\rho$).

Es gibt also zu jedem $\eta > 0$ ein Polynom p mit

$$\left| \frac{1}{z-z_1} - p\left(\frac{1}{z-\zeta_1}\right) \right| < \eta \quad \text{für } |z - \zeta_1| > \delta,$$

insbesondere also für $z \in M$. Folglich finden wir ein Polynom P_1 mit

$$\left| P\left(\frac{1}{z-z_1}\right) - P_1\left(\frac{1}{z-\zeta_1}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{N}, \quad z \in M.$$

Analog finden wir P_j, $j = 2, \ldots, N$ mit

$$\left| P_j\left(\frac{1}{z-\zeta_j}\right) - P_{j+1}\left(\frac{1}{z-\zeta_{j+1}}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{N}, \quad z \in M.$$

Für $Q := P_N$ erhalten wir die Behauptung. ◁

Daraus leiten wir nun ab:

9.5. Satz. (Runge). Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $\{\alpha_j : j \in J\}$ eine Menge (eventuell endlich), die von jeder Zusammenhangskomponente von $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ genau einen Punkt enthält (in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente können wir $\alpha_j = \infty$ wählen). Ferner sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\Omega \supseteq K$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine rationale Funktion R, deren sämtliche Pole in der Menge $\{\alpha_j\}$ liegen, mit

$$|f(z) - R(z)| < \varepsilon \quad \forall\, z \in K.$$

Beweis. $\mathbb{C} \setminus K$ ist offen. Die Zusammenhangskomponenten sind also wegzusammenhängend (s. 1.8). Wir können also in jeder *beschränkten* Zusammenhangskomponente die Pole mit 9.4 problemlos in den festen Punkt α_j verschieben.

In der unbeschränkten Zusammenhangskomponente könnte allerdings das entsprechende α als ∞ gewählt worden sein. Wir ersetzen zunächst α durch M, wobei $M \geq \max\{|z| : z \in K\} + 1$, und verschieben den Pol mit 9.4 dorthin. Dann erhalten wir dafür einen Anteil der Form $P\left(\frac{1}{z-M}\right)$ an der rationalen Funktion R. Diese Funktion ist auf $\{|z| < M\}$ holomorph. Folglich finden wir zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein (Taylor-)Polynom P_0 mit

$$\left| P\left(\frac{1}{z-M}\right) - P_0(z) \right| < \varepsilon' \quad \text{für } |z| \leq M-1.$$

Insbesondere gilt dies dann auf K. Nach Lemma 9.1 sind wir fertig. ◁

9.6. Bemerkung. $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ hat höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten: Jede Zusammenhangskomponente enthält eine Kreisscheibe $B(a_j, r)$. Sind diese disjunkt, so ist $\sum \mathrm{vol}_{\overline{\mathbb{C}}} B(a_j, r) \leq \mathrm{vol}\,(\overline{\mathbb{C}} \setminus K) < \infty$, wobei $\mathrm{vol}_{\overline{\mathbb{C}}}$ das Volumen in der Kugel $\overline{\mathbb{C}}$ bezeichne. Folglich gibt es nur abzählbar oft einen Wert $\neq 0$.

9.7. Folgerung: Polynomapproximation. Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ zusammenhängend und $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ für eine offene Menge $\Omega \supseteq K$. Dann existiert eine Folge von Polynomen (P_k) die auf K gleichmäßig gegen f konvergiert.

Beweis. $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ hat eine Komponente – notwendigerweise die unbeschränkte. Wähle $\alpha_1 = \infty$ in Satz 9.5.

9.8. Bemerkung. Folgerung 9.7 ist falsch, falls $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ nicht zusammenhängend ist: In diesem Fall hat $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ eine beschränkte Zusammenhangskomonente V. Wähle $\alpha \in V$; setze $f(z) = (z - \alpha)^{-1}$ und $M = \max\{|z - \alpha| : z \in K\}$. Angenommen es gäbe ein Polynom P mit $|P(z) - f(z)| < 1/M$ für alle $z \in K$. Dann folgte

$$|(z-\alpha)P(z) - 1| < 1 \quad \forall\, z \in K. \tag{1}$$

Insbesondere gilt (1) für $z \in \partial V \subseteq K$. Nun können wir aber $(z-\alpha)P(z) - 1$ auch als holomorphe Funktion auf V betrachten. Da $\overline{V}$ kompakt ist, folgt nach dem Maximumprinzip

$$|(z-\alpha)P(z) - 1| < 1 \quad \forall z \in V.$$

Speziell für $z = \alpha$ folgt $1 < 1$. Widerspruch!

9.9. Bemerkung. Das Argument in 9.8 zeigt auch, dass man in Satz 9.5 fordern muss, dass $\{a_j\}$ tatsächlich in jeder Komponente einen Punkt enthält.

9.10. Satz. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, und A enthalte genau einen Punkt in jeder Zusammenhangskomponente von $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Dann existiert zu $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ eine Folge R_n rationaler Funktionen mit Polen nur in A, so, dass $R_n \to f$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω.*

Beachte:

- Es wird nicht angenommen, dass Ω zusammenhängend ist.
- $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ kann überabzählbar viele Zusammenhangskomponenten haben (dies ist etwa der Fall, wenn $\Omega = \mathbb{C} \setminus$ Cantormenge ist).

Beweis. Wähle $n \in \mathbb{N}$ und – wie üblich – $K_n = \{z \in \Omega : |z| < n \text{ und } \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) > \frac{1}{n}\}$. Dann ist

$$\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{K}_n = \{|z| > n\} \cup \bigcup_{a \in \mathbb{C}\setminus\Omega} B\left(a, \frac{1}{n}\right).$$

Jede Komponente von $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{K}_n$ enthält eine der obigen offenen Mengen und damit eine Zusammenhangskomponente von $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Jede davon enthält einen Punkt von A. Also lässt sich der Satz von Runge (mit $K = \overline{K}_n$) anwenden. Wir finden ein rationales R_n mit $|R_n(z) - f(z)| < \frac{1}{n}$ für $z \in \overline{K}_n$. Ist nun $K \subseteq \Omega$ kompakt, so existiert ein n_0 mit $K \subseteq \overline{K}_n$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt $|R_n(z) - f(z)| < \frac{1}{n}$ für alle $z \in K$. ◁

Allgemeine Form des Satzes von Mittag-Leffler.

9.11. Satz. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $A \subseteq \Omega$, A habe keinen Häufungspunkt in Ω. Zu jedem $\alpha \in A$ seien ein $m(\alpha) \in \mathbb{Z}$ und eine rationale Funktion*

$$P_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{m(\alpha)} c_{j,\alpha}(z - \alpha)^{-j}$$

gewählt.

Dann existiert ein $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ derart, dass P_α der Hauptteil von f in $\alpha \in A$ ist und f keine weiteren Pole in A hat.

Beweis. Wähle K_n wie oben. Setze $A_1 = A \cap \overline{K}_1$ und $A_n = A \cap (\overline{K}_n \setminus \overline{K}_{n-1})$, $n = 2, 3, \ldots$. Dann ist $A_n \subseteq \overline{K}_n$. Da A keinen Häufungspunkt in Ω hat, hat es auch keinen in $\overline{K}_n$. Daher ist jedes A_n endlich und

$$Q_n(z) = \sum_{\alpha \in A_n} P_\alpha(z)$$

eine rationale Funktion. Die Pole von Q_n liegen in $\overline{K}_n \setminus \overline{K}_{n-1}$ für $n \geq 2$. Insbesondere ist Q_n in einer offenen Umgebung von $\overline{K}_{n-1}$ holomorph.

Da jede Zusammenhangskomponente von $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{K}_{n-1}$ eine von $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ enthält (vgl. das Argument im Beweis von 9.10), können wir nun den Satz von Runge 9.5 anwenden. Wir finden also ein rationales R_n mit Polen nur in $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$, so dass

$$|R_n(z) - Q_n(z)| < 2^{-n} \quad \forall\, z \in K_{n-1}.$$

Wir zeigen nun, dass

$$f(z) = Q_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} (Q_n(z) - R_n(z)), \quad z \in \Omega$$

die gewünschten Eigenschaften hat: Schreibe

$$f = Q_1 + \sum_{n=2}^{N} (Q_n - R_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} (Q_n - R_n).$$

Jeder Term der Reihe rechts ist im Betrag $\leq 2^{-n}$ auf $\overline{K}_N$. Also konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $\overline{K}_N$ zu einer Funktion, die in K_N holomorph ist. Jedes R_n hat alle Pole außerhalb von Ω. Also ist

$$f - (Q_1 + \ldots + Q_N)$$

holomorph in K_N. Da N beliebig war, folgt die Behauptung. ◁

Der Weierstraßsche Produktsatz.

9.12. Definition. Es sei (u_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Wir setzen

$$p_n = (1+u_1)\dots(1+u_n) \qquad \text{“}n\text{-tes Partialprodukt”}.$$

Falls der Limes $p = \lim p_n$ existiert, so wollen wir schreiben

$$p = \prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n).$$

9.13. Lemma. *Es seien $u_1, \dots, u_N \in \mathbb{C}$,*

$$p_N = \prod_{n=1}^{N}(1+u_n), \qquad p_N^* = \prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|).$$

Dann gilt

$$p_N^* \le \exp(|u_1| + \dots + |u_N|) \tag{1}$$

und

$$|p_N - 1| \le p_N^* - 1. \tag{2}$$

Beweis. Aus $1+x \le e^x$ folgt (1). (2) gilt trivialerweise für $N=1$. Sei nun (2) bewiesen bis $N-1$. Dann folgt

$$\begin{aligned} |p_N - 1| &= |p_{N-1}(1+u_N) - 1| = |(p_{N-1}-1)(1+u_N) + u_N| \\ &\le |p_{N-1}^* - 1|(1+|u_N|) + |u_N| \overset{p_{N-1}^* \ge 1}{=} p_N^* - 1. \end{aligned}$$

◁

9.14. Satz. *Es sei (u_n) eine Folge beschränkter komplexwertiger Funktionen auf einer Menge S. Die Reihe $\sum |u_n|$ konvergiere gleichmäßig auf S. Dann konvergiert*

$$f(s) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(s))$$

gleichmäßig auf S. Für $s_0 \in S$ ist äquivalent

(i) $f(s_0) = 0$

(ii) $1 + u_n(s_0) = 0$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$.

Ist $\{n_1, n_2, \dots\}$ eine beliebige Permutation von $\{1,2,3,\dots\}$, so gilt auch

$$f(s) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+u_{n_k}(s)).$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(s)|$ beschränkt auf S. Damit ist nach Lemma 9.13 auch $|p_N(s)| \le C$ für geeignetes C und alle N.

Wähle $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ (insbesondere ist dann $e^{\varepsilon} - 1 \le 2\varepsilon$ nach dem Mittelwertsatz). Dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=N_0}^{\infty}|u_n(s)| < \varepsilon, \quad s \in S. \tag{1}$$

Nun sei $\{n_1, n_2, \dots\}$ eine Permutation von $\mathbb{N}$. Es sei $N \ge N_0$. Wähle M so groß, dass

$$\{1, 2, \dots, N\} \subseteq \{n_1, \dots, n_M\} =: Z_M.$$

Setze $q_M = \prod_{k=1}^{M}(1+u_{n_k})$. Dann gilt

$$q_M - p_N = p_N \left(\prod_{\substack{n_k \in Z_M \\ n_k > N}} (1+u_{n_k}) - 1 \right). \tag{2}$$

Aus (1) und Lemma 9.13 folgt

$$|q_M - p_N| \le |p_N|(e^{\varepsilon}-1) \le 2\,|p_N|\varepsilon < 2C\varepsilon.$$

Daher haben die Folgen (q_M) und (p_N) denselben Grenzwert.

Ist speziell $n_k = k$, so zeigt dieselbe Überlegung, dass die Folge der Partialprodukte gleichmäßig gegen einen Grenzwert $f(s)$ konvergiert. Aus

$$|p_M - p_{N_0}| < 2|p_{N_0}|\varepsilon$$

folgt $|p_M| \ge (1-2\varepsilon)|p_{N_0}|$, also auch

$$|f(s)| \ge (1-2\varepsilon)(p_{N_0}(s)), \quad s \in S.$$

Also kann $f(s_0) = 0$ nur gelten, wenn $p_N(s_0) = 0$ für ein N. ◁

9.15. Satz. *Es seien $0 \le u_n < 1$. Dann gilt*

$$\prod(1-u_n) > 0 \;\Leftrightarrow\; \sum u_n < \infty.$$

Beweis. Die Partialprodukte p_N bilden eine monoton fallende Folge positiver Zahlen. Daher existiert der Grenzwert, p. Ist $\sum u_n < \infty$, so ist $p > 0$ nach 9.14. Andererseits ist $1-u \le e^{-u}$ für $0 \le u \le 1$, somit

$$p \le p_N = \prod_{n=1}^{N}(1-u_n) \le \exp(-u_1 - u_2 - \ldots - u_N).$$

Ist also $\sum u_n = \infty$, so ist $p = 0$. ◁

9.16. Satz. *Es seien $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, kein f_n sei identisch Null in einer Zusammenhangskomponente von Ω. Die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)| \tag{1}$$

konvergiere gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω. Dann konvergiert das Produkt

$$f(s) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(s)$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen gegen eine Funktion $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Ferner gilt

$$m(f;z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, z), \tag{2}$$

wobei $m(f,z)$ die Vielfachheit der Nullstelle von f in z ist ($m(f,z) = 0$ falls $f(z) \ne 0$). Die rechte Seite ist stets $< \infty$.

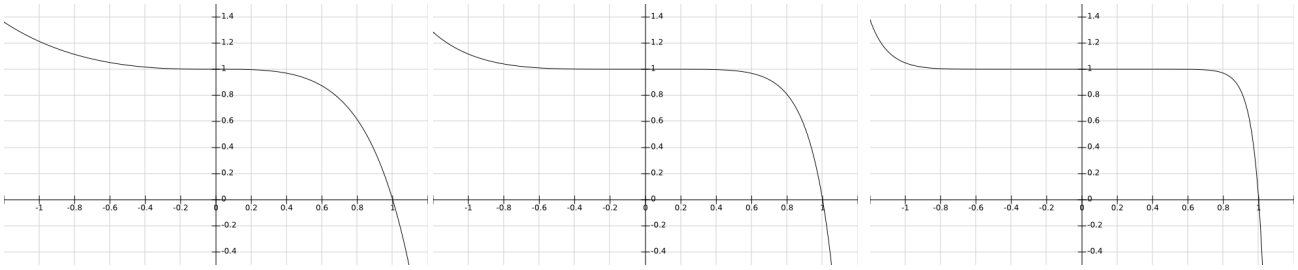
Beweis. Gleichmäßige Konvergenz folgt aus 9.14 mit $u_n = 1 - f_n$. Ist nun $z \in \Omega$, so existiert wegen (1) eine Umgebung V von z, in der nur endlich viele der f_n eine Nullstelle haben. Das Produkt der restlichen Faktoren liefert eine Funktion ohne Nullstelle nach 9.14. Also folgt (2) mit endlicher rechter Seite. ◁

9.17. Die Elementarfaktoren von Weierstraß. Wir setzen $E_0 = 1 - z$ und

$$E_p(z) = (1-z)\exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right\}.$$

Einzige Nullstelle von E_p ist $z = 1$ mit Ordnung 1.

Die Elementarfaktoren liegen nahe an 1 für $|z| < 1$. Hier die Graphen von E_2, E_4 und E_{10}:



9.18. Lemma.

$$|1 - E_p(z)| \le |z|^{p+1}, \quad |z| \le 1.$$

Beweis. Klar für $p = 0$. Für $p \ge 1$ ist

$$\begin{aligned} E_p'(z) &= -\exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right\} + (1-z)\sum_{j=0}^{p-1} z^j \ \exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right\} \\ &= -z^p \exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Damit hat E_p' eine Nullstelle der Ordnung p in $z = 0$. Die Taylorentwicklung von $-E_p'$ in Null hat wegen (1) nichtnegative Koeffizienten. Nun ist

$$1 - E_p(z) = -\int_{[0,z]} E_p'(w)\, dw;$$

folglich hat $1 - E_p$ eine Nullstelle der Ordnung $p + 1$ in $z = 0$. Setzen wir

$$\varphi(z) = \frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}}, \tag{2}$$

so hat die Taylorentwicklung von φ ebenfalls nichtnegative Koeffizienten. Daher ist für $|z| \le 1$

$$|\varphi(z)| \le \varphi(1) = \frac{1-0}{1} = 1.$$

◁

9.19. Satz. *Es sei (z_n) Folge in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $r_n := |z_n| \to \infty$. Ferner sei (p_n) Folge in $\mathbb{N}_0$ mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty, \quad r > 0. \tag{1}$$

Dann definiert das unendliche Produkt

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

eine ganze Funktion p. Sie hat Nullstellen in den z_n, aber keine weiteren. Genauer: Kommt die Zahl α genau m-mal in der Folge (z_n) vor, so hat p eine Nullstelle der Ordnung m in α.

Bedingung (1) *ist nach dem Wurzelkriterium für $p_n = n - 1$ stets erfüllt.*

Beweis. Es sei r fest und $|z| \le r$. Dann gilt nach 9.18 für alle n mit $r_n \ge r$:

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \le \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} \le \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1}.$$

Dies ist für fast alle n der Fall. Aus (1) folgt, dass

$$\sum \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$$

gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ konvergiert. Nun liefert 9.16 die Behauptung. ◁

9.20. Weierstraßscher Produktsatz in $\mathbb{C}$. Es sei f eine ganze Funktion mit $f(0) \neq 0$. Es seien $z_1, z_2, \ldots$ die Nullstellen von f, mit Vielfachheiten aufgelistet. Dann gibt es eine ganze Funktion g und eine Folge (p_n) nichtnegativer ganzer Zahlen mit

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

(Die Faktorisierung ist nicht eindeutig.)

Beweis. Definiere p wie in Satz 9.19; wähle dabei als z_n die Nullstellen von f und wähle die p_n so, dass die Bedingung 9.19(1) erfüllt ist. Dann hat $\frac{f}{p}$ nur hebbare Singularitäten, kann also zu einer ganzen Funktion fortgesetzt werden. Ferner hat f/p keine Nullstelle. Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, hat f/p nach 8.15 einen Logarithmus, g. ◁

9.21. Satz. (Weierstraß). *Es sei $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ offen, $\Omega \neq \overline{\mathbb{C}}$. Ferner sei $A \subseteq \Omega$ eine Menge ohne Häufungspunkte in Ω. Zu jedem $a \in A$ wähle eine Zahl $m(a) \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Funktion $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, die in jedem $a \in A$ eine Nullstelle der Ordnung $m(a)$ hat und keine weitere.*

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\infty \in \Omega$, aber $\infty \notin A$ (wäre dies nicht so, so könnten wir es durch Anwendung einer Möbiustransformation erreichen). Dann ist $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ eine nichtleere kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ (vgl. das Argument in 7.8), und ∞ ist kein Häufungspunkt von A.

Ist A endlich, so können wir f als rationale Funktion einfach konstruieren: Wir wählen zunächst ein Polynom p mit den entsprechenden Nullstellen und setzen dann für ein $m \notin \Omega$

$$f = \frac{p}{(z-m)^{\operatorname{grad} p}}.$$

Ist A unendlich, so ist A abzählbar (da $A \cap K$ endlich für kompaktes $K \subseteq \Omega$). Nun sei (α_n) eine Folge, in der jedes Element $\alpha \in A$ genau $m(\alpha)$-mal vorkommt. Zu jedem α_n wähle einen Punkt $\beta_n \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ so, dass

$$|\beta_n - \alpha_n| \le |\beta - \alpha_n| \quad \text{für alle } \beta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega.$$

Dies ist möglich, da $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ kompakt ist. Da A keinen Häufungspunkt in Ω hat und auch ∞ kein Häufungspunkt ist, müssen die α_n gegen den Rand von Ω rücken. Es folgt

$$|\beta_n - \alpha_n| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Wir zeigen nun, dass

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)$$

die gewünschten Eigenschaften hat. Dazu setzen wir $r_n = 2\,|\alpha_n - \beta_n|$. Es sei K eine kompakte Teilmenge von Ω. Da $r_n \to 0$, existiert ein N derart, dass $|z - \beta_n| > r_n$ für alle $z \in K$ und alle $n \geq N$. Damit ist

$$\left|\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Mit Lemma 9.18 folgt, dass

$$\left|1 - E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \quad z \in K, n \geq N.$$

Nun folgt mit Satz 9.16 die Behauptung. ◁

9.22. Folgerung. Jede meromorphe Funktion in Ω ist Quotient zweier holomorpher Funktionen auf Ω.

Beachte: Umgekehrt ist trivialerweise jeder Quotient holomorpher Funktionen meromorph.

Beweis. Es sei $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ und A die Menge aller Pole von f in Ω. Für jedes $\alpha \in A$ sei $m(\alpha)$ die Ordnung des Pols. Mit dem Satz von Weierstraß finden wir ein $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, das eine Nullstelle der Ordnung $m(\alpha)$ in jedem $\alpha \in A$ hat und keine weiteren Nullstellen. Setze $g = fh$. Die Singularitäten von g sind hebbar, somit lässt sich g zu einer holomorphen Funktion auf Ω fortsetzen. Damit hat $f = g/h$ die gewünschte Form. ◁

10. Das Dirichlet-Problem

Harmonische Funktionen. Im Folgenden sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Wir werden U mit einer offenen Menge von $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Wir erinnern uns, dass $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ der Laplace-Operator ist und dass eine Funktion $f \in C^2(U)$ (zweimal total reell stetig differenzierbar) harmonisch heißt, falls $\Delta f = 0$.

10.1. Lemma. *Es sei $f \in C^2(U)$.*

(a) *f harmonisch $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ harmonisch.*
(b) *Ist $f \in \mathcal{H}(U)$, so ist f harmonisch.*
(c) *Ist $f \in \mathcal{H}(U)$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, so ist $\ln|f|$ harmonisch.*

Beweis. (a) Schreibe $f = u + iv$ mit reellwertigen u, v. Dann ist $f \in C^2 \Leftrightarrow u, v \in C^2$ und $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$.

(b) Aus $f \in \mathcal{H}(U)$ folgt $f \in C^\infty(U)$. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen liefern

$$\begin{aligned} f_{xx} + f_{yy} &= u_{xx} + u_{yy} + i(v_{xx} + v_{yy}) \\ &= v_{yx} - v_{xy} + i(-u_{yx} + u_{xy}) \\ &= 0, \quad \text{da } f \in C^2. \end{aligned}$$

(c) Es sei D eine beliebige Kreisscheibe in U. Dann finden wir ein $g \in \mathcal{H}(D)$ mit $f = e^g$; somit ist auf D

$$|f(z)| = |\exp(g(z))| = \exp(\operatorname{Re} g(z)) \text{ also } \ln|f(z)| = \operatorname{Re} g(z) \text{ harmonisch.}$$

Damit ist $\ln|f(z)|$ auf D – und somit überall – harmonisch. ◁

10.2. Definition. Es sei $u : U \to \mathbb{R}$ harmonisch. Wir nennen eine Funktion $v \in C^2(U, \mathbb{R})$ eine harmonische Konjugierte zu u, falls die Funktion $f = u + iv$ holomorph auf U ist.

10.3. Lemma.

(a) *Die harmonische Konjugierte ist wieder harmonisch.*
(b) *Die harmonische Konjugierte ist bis auf eine Konstante eindeutig.*
(c) *Auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat $\ln|z|$ eine harmonische Konjugierte.*
(d) *Auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es keine harmonische Konjugierte zu $\ln|z|$.*

Beweis. (a) 10.2(a).
(b) Sind $f_1 = u + iv_1$ und $f_2 = u + iv_2$ holomorph, so ist $f_1 - f_2$ als holomorphe Funktion mit verschwindendem Realteil konstant.
(c) Es ist

$$\ln|z| + i \operatorname{Im} \ln(z) = \operatorname{Re} \ln(z) + i \operatorname{Im} \ln z = \ln z \in \mathcal{H}(U).$$

(d) Wir setzen $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $U_+ = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq}$, $U_- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq}$. Angenommen, $\ln|z| + iv \in \mathcal{H}(U)$. Bezeichne mit $\ln_\pm$ den (bekanntlich existierenden) Logarithmus auf $U_\pm$ mit Argument in $]-\pi, \pi[$ bzw. $]0, 2\pi[$. Dann stimmen $\ln_+$ und $\ln_-$ in der oberen Halbebene überein. Ferner liefern $\operatorname{Im} \ln_\pm$ auch harmonische Konjugierte auf $U_\pm$. Also ist nach (b): $v|_{U_\pm} = \ln_\pm + c_\pm$ mit geeigneten Konstanten $c_\pm$. Wegen der Übereinstimmung in der oberen Halbebene: $c_+ = c_-$. Damit hätten wir eine holomorphe Logarithmusfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Widerspruch! ◁

10.4. Satz. *Es sei D einfach zusammenhängend. Dann hat jede auf D harmonische Funktion eine harmonische Konjugierte.*

Beweis. Gesucht ist $v \in C^1(D, \mathbb{R})$ mit

$$v_x = -u_y \quad \text{und} \quad v_y = u_x,$$

d.h. eine Funktion mit vorgegebenem Gradienten. Da D einfach zusammenhängt, ist die Aufgabe lösbar, sofern die Integrabilitätsbegingungen erfüllt sind, also falls

$$v_{xy} = v_{yx} \quad \text{bzw.} \quad -u_{yy} = u_{xx}.$$

Dies gilt, weil u harmonisch ist.

Explizit für den Fall $D = B(a, r)$ mit $0 < r \leq \infty$: Wir machen den Ansatz:

$$v(x, y) = \int_{\operatorname{Im} a}^{y} u_x(x, t)\, dt + \varphi(x),$$

wobei

$$\varphi(x) :]\operatorname{Re} a - r, \operatorname{Re} a + r[\to \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar ist.}$$

Es folgt wegen $u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0$:

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= \int_{\operatorname{Im} a}^{y} u_{xx}(x, t)\, dt + \varphi'(x) \\ &= \int_{y}^{\operatorname{Im} a} u_{yy}(x, t)\, dt + \varphi'(x) \\ &= u_y(x, \operatorname{Im} a) - u_y(x, y) + \varphi'(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Wir setzen daher

$$\varphi(x) = \int_{x}^{\operatorname{Re} a} u_y(t, \operatorname{Im} a)\, dt.$$

Nach (1) ist dann $v \in C^1$ und $v_x = -u_y$. Ferner ist

$$v_y(x, y) = u_x(x, y) + 0.$$

◁

10.5. Folgerung.

(a) *Jede reellwertige harmonische Funktion ist lokal Realteil einer holomorphen Funktion.*

(b) *Jede reellwertige harmonische Funktion ist lokal in eine Potenzreihe entwickelbar.*

Beweis. (a) 10.4.
(b) Es sei $D = B(a, r)$ eine offene Kreisscheibe und $f \in \mathcal{H}(D)$ mit $\operatorname{Re} f = u$. Die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

konvergiert absolut für $|z| < r$. Schreibe $z = x + iy$ und $a = \alpha + i\beta$. Dann ist

$$(z - a)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (x - \alpha)^{n-l} i^l (y - \beta)^l.$$

Einsetzen in die Potenzreihe für f liefert die Reihe

$$f(x + iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} c_n i^l \binom{n}{l} (x - \alpha)^{n-l} (y - \beta)^l,$$

wobei die Reihe für $|x - \alpha| < r/2$ und $|y - \beta| < r/2$ konvergiert (da $\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} = 2^n$). Damit ist auch die Reihe für den Realteil

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} b_{nl} (x - \alpha)^{n-l} (y - \beta)^l \quad \text{mit } b_{nl} = \operatorname{Re} \left(c_n \binom{n}{l} i^l \right)$$

konvergent. ◁

10.6. Bemerkung. Harmonische Funktionen erfüllen nicht den Identitätssatz in der strengen Form, wie wir sie für holomorphe Funktionen kennen. Beispiel. $u(x,y) = x$ ist harmonisch auf $\mathbb{R}^2$, aber $u(x,y) = 0$ für alle $(0,y) \in \mathbb{R}^2$.

Es gilt jedoch eine schwächere Form:

10.7. Satz. (Identitätssatz für harmonische Funktionen) *Es sei U ein Gebiet und $u : U \to \mathbb{R}$ harmonisch. Ist $u \equiv 0$ auf einer offenen Menge, so ist $u \equiv 0$ überall.*

Beweis. Setze $E = \{z \in U : u \equiv 0 \text{ auf offener Umgebung von } z\}$. Dann gilt

(i) $E \neq \emptyset$.

(ii) E ist offen nach Definition.

(iii) E ist abgeschlossen in U: Es sei (w_n) eine Folge in E mit $w_n \to w \in U$. Wähle eine offene Kreisscheibe $D = B(w,r)$, $r > 0$, in U und ein $f \in \mathcal{H}(D)$ mit $u = \operatorname{Re} f$. Nun existiert ein n_0 mit $w_n \in D$ für alle $n \geq n_0$. Folglich ist $u \equiv 0$ auf einer offenen Menge $V \subseteq D$. Auf V hat f Realteil 0. Daher ist f konstant auf V, also auch auf D. Somit ist $u \equiv 0$ auf D.

Aus (i)-(iii) folgt, dass $E = U$ ist. ◁

10.8. Satz. *Für ein Gebiet Ω ist äquivalent:*

(a) *Ω ist einfach zusammenhängend.*

(b) *Jede harmonische Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ hat eine harmonische Konjugierte.*

Beweis. '$\Rightarrow$' 10.4.

Ggf. direkt: Für $\Omega = \mathbb{C}$ direkt konstruierbar, vgl. 10.4. Sei also $\Omega \neq \mathbb{C}$. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz finden wir $\kappa : \Omega \to \mathbb{E}$ biholomorph. Dann ist $u_1 = u \circ \kappa^{-1}$ harmonisch auf $\mathbb{E}$ (nachrechnen, dass die Komposition einer harmonischen Funktion mit einer holomorphen harmonisch ist), folglich nach 10.4 Realteil einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$. Dann ist $f \circ \kappa \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $\operatorname{Re} f = u$.

'$\Leftarrow$' Zeige: Jede nullstellenfreie holomorphe Funktion hat einen holomorphen Logarithmus.

Dazu: Ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nullstellenfrei, so ist $u = \ln|f(z)|$ harmonisch (10.1(c)). Nach Annahme existiert dann ein $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $\operatorname{Re} h = u$. Dann ist

$$\left|\frac{f(z)}{\exp h(z)}\right| = \frac{|f(z)|}{\exp(\operatorname{Re} h(z))} = \frac{|f(z)|}{|f(z)|} = 1.$$

Nun nimmt ja der Betrag einer holomorphen Funktion nur dann sein Maximum an, wenn die Funktion konstant ist. Daher ist f/e^h konstant, also $f = e^{h+c}$. ◁

10.9. Definition. Wir sagen, $u \in C(U,\mathbb{R})$ habe die Mittelwerteigenschaft in U, falls für jedes $a \in U$ und jedes $r > 0$ mit $\overline{B(a,r)} \subseteq U$ gilt

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{it})\,dt.$$

10.10. Satz. *Jede harmonische Funktion u auf U hat die Mittelwerteigenschaft.*

Beweis. Liegt der Kreis $B(a,R)$ ganz in U, so existiert nach Satz 10.4 ein $f \in \mathcal{H}(B(a,R))$ mit $u = \operatorname{Re} f$. Für $r < R$ ist nach Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})ire^{it}}{re^{it}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt.$$

Übergang zum Realteil liefert die Mittelwerteigenschaft. ◁

10.11. Satz. (Maximum- und Minimumprinzip für harmonische Funktionen) *Es sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$. Die Funktion $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$ habe die Mittelwerteigenschaft auf Ω. Dann gilt*

(a) *Ist $u(z) \geq u(a)$ für alle $z \in \Omega$, so ist $u \equiv u(a)$ auf Ω.*

(b) *Ist $u(z) \leq u(a)$ für alle $z \in \Omega$, so ist $u \equiv u(a)$ auf Ω.*

Mit anderen Worten: Reellwertige harmonische Funktionen nehmen ihr Maximum bzw. Minimum nur an, wenn sie konstant sind.

Beweis. (a) Es sei $E = \{z \in \Omega : u(z) = u(a)\}$. Dann gilt

(i) $E \neq \emptyset$, da $a \in E$.

(ii) E ist abgeschlossen, da u stetig.

(iii) E ist offen: Es sei $z_0 \in E$ und $B(z_0, r) \subseteq E$. Dann gilt für beliebiges $\rho < r$:

$$u(a) = u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{it})\, dt.$$

Nun ist die rechte Seite $\leq u(a)$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn $u(z) = u(a)$ für alle z mit $|z - z_0| = \rho$.

Es folgt, dass $E = \Omega$.

(b) Betrachte $-u$. ◁

10.12. Bemerkung. Für den Beweis von (a) braucht man nur die

$$\text{Super-MWE:} \quad u(a) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it}) dt.$$

Für (b) braucht man nur die Sub-MWE $u(a) \leq \ldots$.

10.13. Folgerung. *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet, u habe die Mittelwerteigenschaft auf Ω und sei stetig auf $\overline{\Omega}$. Dann nimmt u sein Maximum und sein Minimum auf $\partial\Omega$ an.*

Insbesondere: Ist $u = 0$ auf $\partial\Omega$, so ist $u \equiv 0$.

Das Dirichlet-Problem.

10.14. Aufgabenstellung. Es sei Ω ein beschränktes Gebiet und $f \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$ gegeben. Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= f \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Erweitert: Ω sei ein beliebiges Gebiet in $\mathbb{C}$ und $\partial_\infty\Omega$ der Rand von Ω in $\overline{\mathbb{C}}$. Gegeben sei ferner eine stetige Funktion $f : \partial_\infty\Omega \to \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}_\infty, \mathbb{R})$ (hier ist $\overline{\Omega}_\infty$ der Abschluss von Ω in $\overline{\mathbb{C}}$) mit

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u|_{\partial_\infty\Omega} &= f \text{ auf } \partial_\infty\Omega. \end{aligned}$$

10.15. Lemma. *Falls eine Lösung des Dirichlet-Problems existiert, so ist sie eindeutig.*

Beweis. Zunächst sei Ω beschränkt. Dann folgt die Eindeutigkeit sofort aus 10.13 durch Betrachtung der Differenz der Lösungen.

Ist Ω unbeschränkt, so folgt die Behauptung aus dem folgenden Lemma. ◁

10.16. Lemma. *Es sei Ω ein Gebiet, $u \in C(\overline{\Omega}_\infty, \mathbb{R})$ habe die Mittelwerteigenschaft in Ω und verschwinde auf $\partial_\infty\Omega$. Dann ist $u = 0$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $u \leq 0$ auf Ω ist (denn dann zeigt man mit dem gleichen Argument, dass $u \geq 0$ ist). Dazu wiederum genügt es zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $u(z) \leq \varepsilon$ für alle $z \in \Omega$.

Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann ist wegen der Stetigkeit von u auf $\overline{\Omega}_\infty$ die Menge $K_\varepsilon = \{z \in \Omega : u(z) \geq \varepsilon\}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

Angenommen, sie ist nicht leer. Wähle $z_0 \in K_\varepsilon$ so, dass $u(z_0) \geq u(z)$ für alle $z \in K_\varepsilon$. Dann ist auch $u(z) \leq u(z_0)$ für alle $z \in \Omega$. Auf Grund des Maximumprinzips ist dann $u(z) = u(z_0)$ auf Ω. Widerspruch ($u = 0$ am Rand). $\lhd$

10.17. Der Poissonkern. Für $r \in [0, 1[$, und $\theta \in \mathbb{R}$ setze

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Es ist

$$P_r(\theta) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + r\exp(i\theta)}{1 - r\exp(i\theta)}\right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2},$$

denn

$$\frac{1 + r\exp(i\theta)}{1 - r\exp(i\theta)} \quad = \quad (1 + re^{i\theta}) \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta}.$$

Wegen $\operatorname{Re} z = (z + \overline{z})/2$ ist ist

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1 + r\exp(i\theta)}{1 - r\exp(i\theta)}\right) \quad = \quad \operatorname{Re}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{1 + r\exp(i\theta)}{1 - r\exp(i\theta)}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1 + r\exp(i\theta)}{1 - r\exp(i\theta)} + \frac{1 + r\exp(-i\theta)}{1 - r\exp(-i\theta)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1 - r^2 + 1 - r^2}{1 - r(\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)) + r^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}. \end{aligned}$$

10.18. Eigenschaften des Poissonkerns.

(a) $P_r(\cdot)$ ist stetig und positiv, $2\pi-$periodisch.

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(\theta)\, d\theta = 2\pi$ für alle $r \in [0, 1[$.

(c) Für jedes $0 < \delta \leq 2\pi$ gilt $P_r \to 0$ gleichmäßig auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ für $r \to 1^-$.

(d) Setzen wir $z = re^{i\theta} \in \mathbb{E}$, so ist die Funktion $z \mapsto P_r(\theta)$ harmonisch auf $\mathbb{E}$.

(Kennen wir schon so ähnlich: Eine approximative Identität, hier zusätzlich harmonisch.)

Beweis. (a) $1 - 2r\cos\theta + r^2 \geq 1 - 2r + r^2 = (1 - r)^2 > 0$.

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(\theta)\, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, d\theta = 2\pi$, da das Integral für $n \neq 0$ Null ist.

(c) Es ist $1 - 2r\cos\theta + r^2 \geq 1 - 2r\cos\delta + r^2 = (1 - r\cos\delta)^2 + r^2(1 - \cos^2\delta)$ von Null weg beschränkt für $0 < \delta \leq \theta \leq 2\pi - \delta$, da Daher ist

$$\sup\{P_r(\theta) : \delta \leq \theta \leq 2\pi - \delta\} \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\delta + r^2} \to 0.$$

(d) Die Abbildung ist wohldefiniert, da $P_0(\theta)$ von θ nicht abhängt und wegen (a). Ferner stimmt nach 10.17 diese Abbildung überein mit der Abbildung

$$z \mapsto \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right);$$

diese ist als Realteil einer holomorphen Funktion harmonich. ◁.

10.19. Lösung des Dirichlet-Problems für $\mathbb{E}$.

(a) Es sei $f \in C(\partial\mathbb{E}, \mathbb{R})$. Dann gibt es genau eine Funktion $u \in C(\overline{\mathbb{E}}, \mathbb{R})$, die in $\mathbb{E}$ harmonisch ist, mit $u|_{\partial\mathbb{E}} = f$. Sie ist gegeben durch

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})P_r(\theta - t)\,dt, \quad 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

(b) Ist $u \in C(\overline{\mathbb{E}}, \mathbb{R})$ harmonisch in $\mathbb{E}$, so ist u gegeben durch

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})P_r(\theta - t)\,dt, \quad 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Beweis. (b) folgt aus (a), indem wir $f = u|_{\partial\mathbb{E}}$ einsetzen.

(a) Aus 10.18(d) folgt mit Differenzieren unter dem Integral, dass u harmonisch ist. Es bleibt zu zeigen, dass $u|_{\partial\mathbb{E}} = f$ ist. Das folgt wie üblich aus den Eigenschaften in 10.18. Der Vollständigkeit halber:

Wir müssen lediglich zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $r_0 \in [0, 1[$ und ein $\delta > 0$ existieren mit der Eigenschaft, dass

$$|u(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta_0})| < \varepsilon \quad \text{für } r_0 \leq r < 1,\ |\theta - \theta_0| < \delta/2.$$

Dazu wähle zunächst $\delta > 0$ so, dass

$$\left|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta_0})\right| < \varepsilon/3 \quad \text{für } |\theta - \theta_0| \leq 2\delta.$$

Setze

$$M = \max\{|f(z)| : z \in \partial\mathbb{E}\}.$$

und wähle (nach 10.18(c)) ein r_0 so, dass

$$|P_r(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{6M} \quad \text{für } \delta \leq \theta \leq 2\pi - \delta,\ r_0 \leq r < 1.$$

Dann gilt für $r_0 \le r < 1$ und $|\theta - \theta_0| \le \delta/2$:

$$\begin{aligned}
\left|u(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta_0})\right| &\overset{10.18(b)}{=} \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} [f(e^{it}) - f(e^{i\theta_0})] P_r(\theta - t)\, dt\right| \ \text{(mit } u = \theta - t) \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(e^{i(\theta-u)}) - f(e^{i\theta_0})\right| P_r(u)\, du \quad \text{Integrationsgrenzen egal wegen Period.} \\
&\overset{\text{oBdA } \theta\neq 0}{=} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)\left[\left|f(e^{i(\theta-u)})\right| + \left|f(e^{i\theta_0})\right|\right] P_r(u)\, du \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \left|f(e^{i(\theta-u)}) - f(e^{i\theta_0})\right| P_r(u)\, du \\
&\le \frac{1}{2\pi}\cdot 2M \cdot \frac{\varepsilon}{6M}\cdot 2\pi + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{3}\cdot 2\pi = \frac{2}{3}\varepsilon,
\end{aligned}$$

da $|\theta - u - \theta_0| < |\theta - \theta_0| + |u| \le \frac{\delta}{2} + \delta < 2\delta$, falls $u \in [-\delta, \delta]$. ◁

10.20. Verallgemeinerung. Die Aussage gilt sinngemäß für Kreisscheiben $B(a, R)$ mit $0 < R < \infty$. Setze

$$u(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta})\ P_{R,r}(\theta - t)\, dt$$

mit

$$P_{R,r}(\theta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2} = P_{r/R}(\theta).$$

Beweis. Es sei $f \in C(S(a, R), \mathbb{R})$. Definiere $\tilde{f} \in C(S(0, 1), \mathbb{R})$ durch $\tilde{f}(z) = f(a + Rz)$. Mit 10.19 bestimme $\tilde{u} \in C(\overline{\mathbb{E}}, \mathbb{R})$, harmonisch in $\mathbb{E}$ mit $\tilde{u} = \tilde{f}$ on $\partial\mathbb{E}$. Nun setze

$$u(z) = \tilde{u}\left(\frac{z - a}{R}\right),\ |z - a| < R.$$

Dann ist für $z = a + re^{i\theta}$, $r < R$, wegen $\frac{z-a}{R} = \frac{r}{R}\, e^{it}$:

$$u(z) = \tilde{u}\left(\frac{z - a}{R}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{it}) P_{r/R}(\theta - t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + Re^{it}) P_{R,r}(\theta - t)\, dt.$$

10.21. Satz. *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Für $u \in C(U, \mathbb{R})$ ist äquivalent*

(i) *u ist in $C^2(U, \mathbb{R})$ und harmonisch.*

(ii) *u hat die Mittelwerteigenschaft auf U.*

(iii) *u hat lokal die Mittelwerteigenschaft auf U.*

Beweis. (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ist klar. Es sei also z_0 in U und $r > 0$ so, dass u auf $B(z_0, r)$ die Mittelwerteigenschaft hat. Wähle (nach 10.20) $v \in C(\overline{B(z_0, r)}, \mathbb{R})$ so, dass v harmonisch auf $B(z_0, r)$ ist und

$$v|_{S(z_0,r)} = u|_{S(z_0,r)}.$$

Dann hat $v - u$ die Mittelwerteigenschaft auf $B(z_0, r)$ und ist $\equiv 0$ auf $S(z_0, r)$. Aus dem Maximumprinzip 10.13 folgt, dass $u - v \equiv 0$ auf $B(z_0, r)$. Damit ist u harmonisch auf $B(z_0, r)$. Da z_0 beliebig war, folgt die Behauptung. ◁

Einfach zusammenhängende beschränkte Gebiete.

10.22. Definition. Ein Randpunkt β eines einfach zusammenhängenden Gebiets Ω in $\mathbb{C}$ heißt einfacher Randpunkt, falls gilt: Zu jeder Folge $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ in Ω mit $\alpha_j \to \beta$ existiert ein stetiger Weg γ mit Parameterintervall $[0,1]$ und eine Folge $(t_1, t_2, \ldots)$ in $[0,1[$ mit $t_j \nearrow 1$

(i) $\gamma(t) \in \Omega$ für $0 \le t < 1$
(ii) $\gamma(t_j) = \alpha_j$
(iii) $\gamma(1) = \beta$ (dies folgt natürlich sofort aus der Stetigkeit).

10.23. Bemerkung.

(a) Klar: Hat Ω z.B. glatten Rand im Sinne von Analysis 3, 26.4, so ist jeder Randpunkt einfach.
(b) Ist die Bedingung erfüllt, so existiert zu jeder offenen Umgebung V von β in $\overline{\Omega}$ ein $T \in [0,1]$ derart, dass der Weg γ für $T \le t \le 1$ in V verläuft. Wir sehen:
(c) Ist $\Omega = \mathbb{E} \setminus \mathbb{R}_{\ge 0}$ so ist jeder der Punkte β mit $0 < \beta < 1$ *nicht* einfach.

10.24. Satz. *Ist Ω einfach zusammenhängend und beschränkt mit nur einfachen Randpunkten, so hat die nach dem Riemannschen Abbildungssatz existierende biholomorphe Abbildung $\kappa : \Omega \to \mathbb{E}$ eine Fortsetzung zu einer invertierbaren bistetigen Abbildung $\kappa : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{E}}$, wobei $\kappa(\partial\Omega) = \partial\mathbb{E}$.*

Ein Beweis findet sich etwa in dem Buch von Fritzsche (Abschnitt 5.3).

10.25. Satz. *Es sei Ω einfach zusammenhängend und beschränkt mit nur einfachen Randpunkten. Dann hat das Dirichlet-Problem für jedes $f \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$ eine eindeutige Lösung.*

Beweis. Es sei $\kappa : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{E}}$ die Abbildung aus 10.24. Betrachte $g = f \circ \kappa^{-1}|_{\partial\mathbb{E}} \in C(\partial\mathbb{E}, \mathbb{R})$. Wähle $v \in C^2(\mathbb{E}, \mathbb{R}) \cap C(\overline{\mathbb{E}}, \mathbb{R})$, harmonisch in $\mathbb{E}$ so, dass $v|_{\partial\mathbb{E}} = g$. Nun setze $u = v \circ \kappa$. Dann ist u harmonisch auf Ω und $u = f$ auf $\partial\Omega$. Die Eindeutigkeit ist bekannt aus 10.15. ◁

Die Formeln von Poisson-Jensen und Jensen.

10.26. Vorbemerkung. Es sei $R > 0$ und U eine offene Umgebung von $K = \overline{B(0,R)}$, $f \in \mathcal{H}(U)$. Ist $0 \notin f(K)$, so ist $0 \notin f(U)$ nach evtl. Verkleinerung von U. Damit ist dann $z \mapsto \ln|f(z)|$ harmonisch auf U. Also ist

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{it})| P_{R,r}(\theta - t)\, dt, \quad z = re^{it} \in K.$$

Insbesondere ist für $z = 0$:

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{it})|\, dt.$$

10.27. Satz. *Es sei $R > 0$ und U eine offene Umgebung von $B(0,R)$, $f \in \mathcal{H}(U)$, und $f(z) \ne 0$ für alle $z \in S(0,R)$. Ferner seien $a_1, \ldots, a_n$ die ihrer Vielfachheit entsprechend gelisteten Nullstellen von f auf $B(0,R)$. Dann gilt für $z \in B(0,R) \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$*

$$\ln|f(z)| = \sum_{j=1}^{n} \ln\left|\frac{R(z-a_j)}{R^2 - \overline{a}_j z}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{it})|\, P_{R,r}(\theta - t)\, dt, \quad z = re^{it}$$

(Formel von Poisson-Jensen).

Insbesondere ist dann, falls $f(0) \ne 0$:

$$\ln|f(0)| = \sum_{j=1}^{n} \ln\left|\frac{a_j}{R}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{it})|\, dt$$

(Formel von Jensen).

Beweis. Für $z \notin \{a_1, \dots, a_n\}$ setze

$$g(z) = f(z) \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{R^2 - \overline{a}_j z}{R(z - a_j)}.$$

Dann ist g nach Hebung der Singularitäten holomorph auf Ω und nullstellenfrei auf $B(0,R)$, sogar auf $S(0,R)$, da für $|z| = R$ und $|a| < R$

$$\left| \frac{R^2 - \overline{a}z}{R(z-a)} \right| = \left| \frac{z\overline{z} - \overline{a}z}{R(z-a)} \right| = \left| \frac{z}{R} \right| = 1. \tag{1}$$

Nach der Vorbemerkung ist

$$\begin{aligned} \ln|g(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|g(Re^{it})| \; P_{R,r}(\theta - t)\, dt \\ &\overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{it})| \; P_{R,r}(\theta - t)\, dt. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \ln|g(z)| &= \ln|f(z)| + \sum_{j=1}^{n} \ln \left| \frac{R^2 - \overline{a}_j z}{R(z - a_j)} \right| \\ &= \ln|f(z)| - \sum_{j=1}^{n} \ln \left| \frac{R(z-a_j)}{R^2 - \overline{a}_j z} \right|. \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. ◁

10.28. Bemerkung. Die Formeln in 10.27 gelten auch unverändert, wenn f darüber hinaus endlich viele Nullstellen auf $S(0,R)$ hat. Dann muss man das Integral auf der rechten Seite als Lebesgue-Integral oder absolut konvergentes uneigentliches Riemann-Integral auffassen.

Beweis. Es seien $b_k = Re^{it_k}$, $t_k \in [0, 2\pi]$, $k = 1, \dots, m$ die Nullstellen von f auf $S(0,R)$, der Vielfachheit nach wiederholt. Setze

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - b_1) \dots (z - b_m)}, \quad z \in U \setminus \{b_1, \dots, b_m\}.$$

Dann ist g nach Hebung der Singularitäten holomorph in U und hat in $B(0,R)$ die Nullstellen $a_1, \dots, a_n$ von oben. Dann gilt für $z = re^{i\theta}$ in $B(0,R) \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$.

$$\ln|g(z)| = \sum_{j=1}^{n} \ln \left| \frac{R(z-a_j)}{R^2 - \overline{a}_j z} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|g(Re^{it})| \; P_{R,r}(\theta - t)\, dt \tag{1}$$

Ferner ist

$$\ln|g(z)| = \ln|f(z)| - \sum_{k=1}^{m} \ln|z - b_k| \quad \text{und} \tag{2}$$

$$\ln|g(Re^{it})| = \ln|f(Re^{it})| - \sum_{k=1}^{m} \ln|R(e^{it} - e^{it_k})| \quad t \neq t_k. \tag{3}$$

Wir zeigen nun noch: Für jedes k ist

$$t \mapsto \ln|Re^{it} - Re^{it_k}| \; P_{R,r}(\theta - t)$$

auf $[0, 2\pi]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_0^{2\pi} \ln|Re^{it} - Re^{it_k}| \; P_{R,r}(\theta - t) = \ln|z - b_k|. \tag{4}$$

Dazu sei $k \in \{1, \dots, m\}$ fest. Für $R' > R$ ist $z = re^{it} \mapsto \ln\left|re^{it} - R'e^{it_k}\right|$ harmonisch und nullstellenfrei auf einer Umgebung von $B(0,R)$. Nach der Vorbemerkung ist also

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|Re^{it} - R'e^{it_k}|\ P_{R,r}(\theta - t)\,dt = \ln|z - R'e^{it_k}|. \tag{5}$$

Wir betrachten nun den Grenzübergang $R' \searrow R$. Zunächst finden wir (da ln negativ wird) ein $C > 0$ so, dass

$$g(R',t) := \ln|Re^{it} - R'e^{it_k}|\ P_{R,r}(\theta - t) \le C, \quad \text{für } R \le R' \le R+1, t \in [0, 2\pi];$$

(Wert $-\infty$ kommt vor).

Es folgt, dass

$$0 \le C - g(R',t) \nearrow C - g(R,t).$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C - g(R',t)\ dt \nearrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C - g(R,t)\ dt. \tag{6}$$

Nun haben wir auf der linken Seite nach (5):

$$= C - \ln|z - R'e^{it_k}| \to C - \ln|z - Re^{it_k}|.$$

Damit ist die rechte Seite von (6) integrierbar, und es folgt (4).

Zusammenfassend erhalten wir also:

$$\begin{aligned}
\ln|f(z)| &\overset{(2)}{=} \ln|g(z)| + \sum_{k=1}^m \ln|z - b_k| \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^n \ln\left|\frac{R(z-a_j)}{R^2 - \overline{a}_j z}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|g(Re^{it})|\ P_{R,r}(\theta - t)\,dt + \sum_{k=1}^m \ln|z - b_k| \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{j=1}^n \ln\left|\frac{R(z-a_j)}{R^2 - \overline{a}_j z}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{it})|\ P_{R,r}(\theta - t)\,dt \\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|R(e^{it} - e^{it_k})|\ P_{R,r}(\theta - t)\,dt + \sum_{k=1}^m \ln|z - b_k| \\
&\overset{(4)}{=} \sum_{j=1}^n \ln\left|\frac{R(z-a_j)}{R^2 - \overline{a}_j z}\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{it})|\ P_{R,r}(\theta - t)\,dt,
\end{aligned}$$

d.h. die Nullstellen auf dem Rand spielen in der Formel keine Rolle. ◁

Konvergenz harmonischer Funktionen.

10.29. Definition. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Mit $H_{\mathbb{R}}(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum aller auf Ω harmonischen reellwertigen Funktionen. Es ist

$$H_{\mathbb{R}}(\Omega) \subseteq C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}),$$

und wir können daher $H_{\mathbb{R}}(\Omega)$ mit der Metrik d der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen aus 8.2 versehen.

10.30. Satz. *Es seien $u_n \in H_{\mathbb{R}}(\Omega)$ mit $u_n \xrightarrow{d} u$. Dann gilt*

(a) $u \in H_{\mathbb{R}}(\Omega)$ *und*

(b) *die Folge konvergiert tatsächlich in allen Ableitungen, d.h.*

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}u_n}{\partial^\alpha x\partial^\beta y} \xrightarrow{d} \frac{\partial^{\alpha+\beta}u}{\partial^\alpha x\partial^\beta y} \quad \textit{für alle } \alpha,\beta.$$

(c) $H_{\mathbb{R}}(\Omega)$ *ist als abgeschlossenener Unterraum von* $C(\Omega)$ *vollständig.*

Beweis. (a) Der Grenzwert ist wieder stetig und besitzt wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta auch die Mittelwerteigenschaft. Er ist daher harmonisch.

(b) Es genügt zu zeigen, dass für alle $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ mit $B = B(a,R) \in \Omega$ gilt

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}u_n}{\partial^\alpha x\partial^\beta y} \overset{d \text{ auf } B}{\longrightarrow} \frac{\partial^{\alpha+\beta}u}{\partial^\alpha x\partial^\beta y} \quad \text{für alle } \alpha,\beta,$$

Dies wiederum folgt leicht aus der Darstellungsformel für die Lösung des Dirichlet-Problems 10.19(a) und Differenzieren unter dem Integral. Details:

Schreibe $z = x + iy = a + re^{i\theta} \in B$. Dann ist

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(a + Re^{it})P_{R,r}(\theta - t)\,dt,$$

wobei

$$\begin{aligned} P_{R,r}(\theta - t) &= \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} = \frac{R^2 - r^2}{|Re^{it} - re^{i\theta}|^2} \\ &= \frac{R^2 - |z-a|^2}{|Re^{it} - (z-a)|^2} = \frac{R^2 - (x - \operatorname{Re} a)^2 - (y - \operatorname{Im} a)^2}{(R\cos t - x + \operatorname{Re} a)^2 + (R\sin t - y + \operatorname{Im} a)^2} \\ &:= Q_R(t,x,y). \end{aligned}$$

Daher folgt mit Differenzieren unter dem Integral und dominierter Konvergenz

$$\partial_x u_n(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(a + Re^{it})\ \partial_x Q_r(t,x,y)\,dt \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + Re^{it})\ \partial_x Q_r(t,x,y)\,dt.$$

Dabei ist die Konvergenz sogar gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von B°. Also folgt aus der Konvergenz von u_n die von $\partial_x u_n$ und damit beliebigen Ableitungen auf kompakten Teilmengen von B. ◁

10.31. Folgerung. *Es sei* Ω *ein beschränktes Gebiet und* $u_n \in C(\overline{\Omega}) \cap H_{\mathbb{R}}(\Omega)$. *Auf dem Rand gelte* $\gamma_0 u_n =: f_n \overset{glm}{\to} f \in C(\partial D)$.

Dann existiert ein $u \in C(\overline{\Omega}) \cap H_{\mathbb{R}}(\Omega)$ *so, dass*

$$u_n \overset{glm \text{ auf } \overline{\Omega}}{\longrightarrow} u \quad \textit{und} \quad \gamma_0 u = f \textit{ auf } \partial D.$$

Beweis. Nach dem Maximumprinzip ist

$$\|u_n - u_m\|_{\sup \overline{\Omega}} = \|f_n - f_m\|_{\sup \partial\Omega} \overset{n,m\to\infty}{\to} 0$$

Daher ist (u_n) eine Cauchy-Folge bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz auf $\overline{\Omega}$ also erst recht bzgl. d. Sie konvergiert also (wegen der Vollständigkeit) sowohl in $C(\overline{\Omega})$ als auch – wegen 10.29 – in $H_{\mathbb{R}}(\Omega)$ gegen ein u. Weil die Folge auch am Rand konvergiert, folgt $\gamma_0 u = f$. ◁

10.32. Satz. (Harnacksche Ungleichung) *Es sei* $B = B(a,R)$ *und* $0 \le u \in C(\overline{B}) \cap H_{\mathbb{R}}(B)$. *Dann gilt für* $z \in B$*:*

$$\frac{R - |z-a|}{R + |z-a|}\ u(a) \le u(z) \le \frac{R + |z-a|}{R - |z-a|}\ u(a).$$

Beweis. Schreibe $z = a + re^{i\theta}$ mit $0 \le r < R$. Nach der Darstellungsformel für die Lösung des Dirichlet-Problems gilt:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{u(a + Re^{it})}_{\ge 0} P_{R,r}(\theta - t)\, dt$$

Nun ist

$$P_{R,r}(\theta - t) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} = \frac{R^2 - r^2}{|Re^{it} - re^{i\theta}|^2}$$

und (Bild)

$$|R - r|^2 \le |Re^{it} - re^{i\theta}|^2 \le |R + r|^2.$$

Folglich ist

$$\frac{R-r}{R+r} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{it})\, dt}_{=u(a)} \le u(z) \le \frac{R+r}{R-r} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{it})\, dt}_{=u(a)}.$$

10.33. Folgerung. *Unter obigen Voraussetzungen gilt auch*

$$|u(z) - u(a)| \le 2\, \frac{|z-a|}{R - |z-a|}\, u(a).$$

Beweis. Schreibe $1 = (R \pm |z-a|)(R \pm |z-a|)^{-1}$. Dann folgt aus der Harnackschen Ungleichung

$$-2\, \frac{|z-a|}{R - |z-a|}\, u(a) \le -2\, \frac{|z-a|}{R + |z-a|}\, u(a) \le u(z) - u(a) \le 2\, \frac{|z-a|}{R - |z-a|}$$

◁

10.34. Satz. (Liouville) *Es sei u harmonisch auf $\mathbb{C}$ und nach oben oder unten beschränkt. Dann ist u konstant.*

Beweis. O.B.d.A. sei $u \le C$. Setze $v(z) = C - u(z) \ge 0$. Dann ist v harmonisch auf $\mathbb{C}$. Ist z beliebig, so gilt für alle $R > |z|$ nach der Folgerung 10.33 mit $a = 0$:

$$|u(z) - u(0)| = |v(z) - v(0)| \le 2\, \frac{|z|}{R - |z|}\, v(0) \overset{R\to\infty}{\to} 0.$$

Also ist $u(z) = u(0)$. ◁

10.35. Lemma. *Es sei Ω offen und $\mathcal{F}$ eine Teilmenge von $H_{\mathbb{R}}(\Omega)$, die auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gleichmäßig beschränkt ist. Dann ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.*

Beweis. Es sei $a \in \Omega$ und $R > 0$ so, dass $K = \overline{B(a,R)} \subseteq \Omega$ und $C > 0$ mit $|u(z)| \le C$ für alle $z \in K$ und $u \in \mathcal{F}$.

Dann ist $0 \le u(z) + C \le 2C$ für alle $z \in K$, $u \in \mathcal{F}$. Es folgt für $|z - a| < R/2$

$$|u(z) - u(a)| = |(u(z) + C) - (u(a) + C)| \overset{10.33}{\le} 2\, \frac{|z-a|}{R - |z-a|}\, (u(a) + C) \le 2\, \frac{2C}{R/2} |z - a|.$$

◁

10.36. Satz. (Montel, Vitali, Stieltjes) *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Teilmenge $\mathcal{F}$ von $H_{\mathbb{R}}(\Omega)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn sie auf den kompakten Teilmengen von U gleichmäßig beschränkt ist.*

Beweis. Lemma 10.35 und der Satz von Arzelà- Ascoli. ◁

10.37. Satz. (Harnacksches Konvergenzprinzip) *Es sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und (u_n) eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen. Dann konvergiert entweder u_n in $H_{\mathbb{R}}(\Omega)$ oder $u_n \nearrow \infty$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω.*

Der erste Fall tritt also genau dann ein, wenn $\lim u_n(z) < \infty$ für wenigstens ein $z \in \Omega$.

Beweis. Es sei $a \in \Omega$ und $R > 0$ so, dass $\overline{B(a,R)} \subseteq \Omega$. Wir zeigen folgendes:

(i) Ist $\lim u_n(a) < \infty$, so konvergiert (u_n) gleichmäßig auf $K = \overline{B(a,R/2)}$.

(ii) Ist $\lim u_n(a) = \infty$, so gilt $u_n \to \infty$ gleichmäßig auf K.

Dazu: (i) Für $n \geq m$ und $z \in B(a,R/2)$ gilt nach der Harnack-Ungleichung:

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n(z) - u_m(z) &\leq \frac{R+|z-a|}{R-|z-a|}\,(u_n(a)-u_m(a)) \\ &\leq \frac{R+R/2}{R-R/2}\;(u_n(a)-u_m(a)) \leq 3\;(u_n(a)-u_m(a)) \to 0. \end{aligned}$$

Zu (ii): Hier gilt ebenso

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n(z) - u_1(z) &\geq \frac{R-|z-a|}{R+|z-a|}\,(u_n(a)-u_1(a)) \\ &\geq \frac{R-R/2}{R+R/2}\,(u_n(a)-u_1(a)) = \frac{1}{3}\,(u_n(a)-u_1(a))\,. \end{aligned}$$

Nun definieren wir

$$\begin{aligned} E_1 &= \{z \in \Omega : \lim u_n(z) < \infty\} \\ E_2 &= \{z \in \Omega : \lim u_n(z) = \infty\} \end{aligned}$$

Dann sind nach obigen Argumenten beide Mengen offen. Ihre Vereinigung ist Ω, ihr Schnitt leer. Da Ω zusammenhängend ist, ist eine davon leer.

Die Argumente zu (i) und (ii) liefern sofort die gleichmäßige Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen. ◁

Subharmonische Funktionen.

10.38. Definition. Eine stetige Funktion $u : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ heißt subharmonisch (superharmonisch), wenn sie die Sub-MWE (Super-MWE) hat, d.h. falls

$$u(a) \leq (\geq) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it})\,dt, \quad \text{falls } \overline{B(a,r)} \subseteq \Omega.$$

Klar:

(i) u subharmonisch $\Leftrightarrow -u$ superharmonisch.

(ii) u subharmonisch, v harmonisch $\Rightarrow u - v$ subharmonisch.

10.39. Lemma. *Ist $u \in C^2(\Omega,\mathbb{R})$, so gilt:*

$$u \text{ subharmonisch} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta u \geq 0.$$

Beweis. Es sei $K = \overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$ eine Kreisscheibe in Ω um einen beliebigen Punkt $a \in \Omega$. Wir wenden den Satz von Gauß an auf K. Dazu parametrisieren wir ∂K durch $\varphi : [0,2\pi] \to S(a,r)$, $\varphi(t) = a + re^{it} = (\operatorname{Re} a + r\cos t, \operatorname{Im} a + r \sin t)$. Das Oberflächenmaß ist $\sqrt{\varphi'(t)^T \varphi'(t)}\,dt = r\,dt$,

der äußere Einheitsnormalenvektor ist $e^{it} = (\cos t, \sin t)$, und $\langle \nabla u(a+re^{it}), \nu\rangle = u'(a+re^{it})e^{it} = \frac{\partial}{\partial r}u(a+re^{it})$. Nach Gauß ist also

$$\begin{aligned}\int_K \Delta u\, dx &= \int_K \text{div grad } u\, dx = \int_{\partial K} \langle \text{grad } u, \nu\rangle dS(x)\\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(a+re^{it})\; r\, dt = r\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi} u(a+re^{it})\, dt.\end{aligned}$$

Damit sehen wir die Aussage leicht:

"$\Leftarrow$" Ist $\Delta u \geq 0$ so ist die Abbildung $v : [0,r] \to \mathbb{R}$ $s \mapsto \int_0^{2\pi} u(a+se^{it})\, dt$ monoton wachsend. Also ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{it})\, dt =: v(r) \geq v(0) = u(a).$$

"$\Leftarrow$" Ist $\Delta u(z_0) < 0$ für ein z_0, so existiert ein $r > 0$ mit $\Delta u(z) < 0$ für alle $z \in \overline{B(z_0,r)} \subseteq \Omega$. Die obige Abbildung v (nun für $a = z_0$) ist also streng monoton fallend und wir erhalten den Widerspruch

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+re^{it})\, dt = v(r) < v(0) = u(z_0).$$

◁

10.40. Bemerkung. Der Beweis zeigt: Ist $u \in C^2$, so gilt: $\Delta u = 0 \Leftrightarrow u$ hat die MWE.

10.41. Satz.

(a) *Die subharmonischen Funktionen genügen dem Maximumprinzip.*

(b) *Die superharmonischen Funktionen genügen dem Minimumprinzip.*

Beweis. Hatten wir bereits in Bemerkung 10.12 gesehen. ◁

10.42. Bemerkung. Es sei $K = \overline{B(0,1)}$ und $u = |z|^2 = x^2 + y^2$. Dann ist $\Delta u = 4 > 0$, somit u subharmonisch; u hat aber in 0 ein Minimum.

10.43. Definition. Es sei Ω ein Gebiet, $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$ und $a \in \partial_\infty \Omega$. Wir setzen:

$$\limsup_{z\to a} u(z) := \begin{cases} \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\{u(z) : z \in B(a,\varepsilon)\cap\Omega\}, & a \in \mathbb{C};\\ \limsup_{R\to\infty}\{u(z) : z \in \Omega \setminus B(0,R)\}, & a = \infty.\end{cases}$$

Analog definiert man $\liminf u(z)$. Es gilt:

$$\liminf_{z\to a} u(z) = -\limsup_{z\to a}(-u(z)).$$

10.44. Satz. *Es sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonisch mit $\limsup u(z) \leq 0$ für alle $z \in \partial_\infty\Omega$. Dann ist $u \leq 0$ auf Ω. Es gilt sogar entweder $u \equiv 0$ oder $u < 0$ auf Ω.*

Beweis. (Fast wörtlich der Beweis von Lemma 10.16.) Wir zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $u(z) \leq \varepsilon$ für alle $z \in \Omega$.

Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann ist wegen der Stetigkeit von u auf Ω (und, weil gilt $\liminf_{z\to\infty} u(z) \leq 0$, falls Ω unbeschränkt) die Menge $K_\varepsilon = \{z \in \Omega : u(z) \geq \varepsilon\}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

Angenommen, sie ist nicht leer. Wähle $z_0 \in K_\varepsilon$ so, dass $u(z_0) \geq u(z)$ für alle $z \in K_\varepsilon$. Dann ist auch $u(z) \leq u(z_0)$ für alle $z \in \Omega$. Auf Grund des Maximumprinzips ist dann $u(z) = u(z_0)$ auf jedem beschränkten Gebiet Ω_0 mit $\overline{\Omega}_0 \subseteq \Omega$. Folglich ist $u(z) = u(z_0) \geq \varepsilon$ auf Ω. Widerspruch ($\limsup u \leq 0$ am Rand). ◁

10.45. Satz. *Für $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$ ist äquivalent:*

(i) *u ist subharmonisch auf Ω.*

(ii) *u ist lokal subharmonisch auf Ω.*

(iii) *Für jedes $B = B(a,r)$ mit $\overline{B} \subseteq \Omega$ und jedes $v \in H_{\mathbb{R}}(B) \cap C(\overline{B})$ genügt $u - v$ dem Maximumprinzip.*

(iv) *Für jedes $B = B(a,r)$ mit $\overline{B} \subseteq \Omega$ und jedes $v \in H_{\mathbb{R}}(B) \cap C(\overline{B})$ mit $u(z) \leq v(z)$ für alle $a \in \partial B$ gilt $u(z) \leq v(z)$ auf $\overline{B}$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) Klar.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Die Funktion $u - v$ hat auf B die lokale Sub-MWE, und genügt daher dem Maximumprinzip.
(iii) $\Rightarrow$ (iv): Die Funktion $u - v$ genügt dem Maximumprinzip auf B. Also existiert ein $z_0 \in \partial B$ mit $(u-v)(z) \leq (u-v)(z_0) \leq 0$ für alle $z \in B$.
(iv) $\Rightarrow$ (i) Es sei $\overline{B} \subseteq \Omega$. Betrachte die auf B harmonische Funktion $v \in C(\overline{B}, \mathbb{R})$ mit $u(z) = v(z)$ für alle $z \in \partial B$; wir erhalten sie mit Hilfe des Poissonkerns. Aus der Voraussetzung folgt für B wie oben:

$$u(a) \leq v(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(a + re^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it})\, dt.$$

Somit ist u subharmonisch. ◁

10.46. Lemma. *Sind u_1 und $u_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonisch, so auch $u_1 \vee u_2 = \max\{u_1, u_2\}$.*

Beweis. Wir prüfen (iv) aus Satz 10.45 nach: Es sei $(u_1 \vee u_2)(z) \leq v(z)$ für alle $z \in \partial B$. Dann ist $u_1(z), u_2(z) \leq v(z)$ für alle $z \in \partial B$. Nach Annahme ist also $u_1(z), u_2(z) \leq v(z)$ für alle $z \in \overline{B}$, somit $(u_1 \vee u_2)(z) \leq v(z)$ für alle $z \in \overline{B}$.

Perronscher Ansatz zur Lösung des Dirichlet-Problems.

10.47. Die Perron-Familie. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \partial_\infty \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Wir nennen

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(f, \Omega) = \{v : v \text{ subharmonisch in } \Omega, \limsup v(z) \leq f(a) \text{ für alle } a \in \partial_\infty \Omega\}$$

die Perron-Familie zu Ω und f. Da $\partial_\infty \Omega$ kompakt ist und f stetig, gibt es ein $M \geq 0$ mit $|f(a)| \leq M$ für alle $a \in \partial_\infty \Omega$. Dann gilt

(1) $-M \in \mathcal{P}$, somit ist $\mathcal{P} \neq \emptyset$.

(2) $v(z) \leq M$ für alle $v \in \mathcal{P}$ nach Satz 10.44.

10.48. Lemma. *Es existiere eine Lösung $u : \overline{\Omega}_\infty \to \mathbb{R}$ des Dirichlet-Problems zu Ω und f. Dann ist sie ebenfalls Element von $\mathcal{P}$, und es gilt $v(z) \leq u(z)$ für alle $z \in \Omega$, $v \in \mathcal{P}$. Es ist also*

$$u = \sup\{v : v \in \mathcal{P}\} = \max\{v : v \in \mathcal{P}\}.$$

Beweis. Klar: $u \in \mathcal{P}$. Ferner ist die Funktion $v - u$ subharmonisch auf Ω, und es gilt

$$\limsup_{z \to a} (v(z) - u(z)) = \limsup_{z \to a} v(z) - \lim_{z \to a} u(z) \leq f(a) - f(a) = 0.$$

Folglich ist $v - u \leq 0$ auf Ω nach Satz 10.44. ◁

10.49. Lemma. *Es sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonisch und $B = B(a,R)$ mit $\overline{B} \subseteq \Omega$, $R > 0$. Definiere*

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z) & z \in \Omega \setminus B \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{it}) P_{R,r}(\theta - t)\, dt, & z = a + re^{it} \in B \end{cases}$$

(Poisson-Modifikation von u bzgl. $B(a,R)$. Dann ist $\tilde{u}$ subharmonisch auf Ω.

Beweis. Da $\tilde{u}$ stetig auf Ω ist, subharmonisch auf $\Omega \setminus \overline{B}$ ist und harmonisch auf B, genügt es zu zeigen, dass für $b \in S(a,R)$ und $r > 0$ mit $\overline{B(b,r)} \subseteq \Omega$ gilt:

$$\tilde{u}(b) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(b + \rho e^{it})\, dt.$$

Dazu: Nach 10.45(iv) ist $u(z) \leq \tilde{u}(z)$ auf $\overline{B}$. Nach Definition ist also ist $u(z) \leq \tilde{u}(z)$ auf Ω. Es folgt

$$\tilde{u}(b) = u(b) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(b + \rho e^{it})\, dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(b + \rho e^{it})\, dt.$$

◁

10.50. Bemerkung. Sind u_1, $u_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonisch und ist $u_1 \leq u_2$, so gilt dies wegen der Positivität des Poissonkerns auch für die Modifikationen: $\tilde{u}_1 \leq \tilde{u}_2$.

10.51. Satz. *Es sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f : \partial_\infty \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Perron-Funktion $u_f = \max\{v : v \in \mathcal{P}\}$ zu f und Ω in Ω harmonisch.*

Beweis. Es sei $z_0 \in \Omega$ und $R > 0$ so, dass $\overline{B} \subseteq \Omega$ für $B = B(z_0, R)$. Wir zeigen, dass u_f harmonisch auf B ist. Dazu halten wir zunächst fest:

(i) $\mathcal{P}$ ist abgeschlossen unter '$\vee$' nach Lemma 10.46 und

(ii) $\mathcal{P}$ ist abgeschlossen unter Poisson-Modifikation nach Lemma 10.49.

Schritt 1 Wähle eine Folge $(v_n) \subseteq \mathcal{P}$ mit $\lim v_n(z_0) = u_f(z_0)$. Wir können annehmen, dass $v_1 \leq v_2 \leq \ldots$: Wäre dies nicht der Fall, so könnten wir einfach die Folge $w_n = v_1 \vee v_2 \vee \ldots \vee v_n$ betrachten. Diese ist monoton wachsend, und es gilt $v_n(z_0) \leq w_n(z_0) \leq u_f(z_0)$.

Es seien $\tilde{v}_n$ die Poisson-Modifikationen der v_n bzgl. B. Nach (ii) sind $\tilde{v}_n \in \mathcal{P}$, nach 10.50 ist $(\tilde{v}_n)$ monoton wachsend. Ferner:

$$u_f(z_0) \leftarrow v_n(z_0) \leq \tilde{v}_n(z_0) \leq u_f(z_0),$$

also $\tilde{v}_n(z_0) \nearrow u_f(z_0)$.

Nach dem Harnackschen Konvergenzprinzip existiert also ein $v \in H_{\mathbb{R}}(B)$ so, dass $\tilde{v}_n \to v$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von B.

Schritt 2. Wir zeigen nun noch, dass $v(z) = u_f(z)$ für alle $z \in B$. Zunächst gilt dies in z_0. Es sei $z_1 \in B$. Wir wählen eine monoton wachsende Folge (w_n) in $\mathcal{P}$ mit $w_n(z_1) \nearrow u_f(z_1)$. Nun setzen wir

$$W_n := v_n \vee w_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(W_n) \subset \mathcal{P}$ monoton wachsend. Wir bezeichnen mit $\tilde{W}_n$ die Poisson-Modifikationen bzgl. B. Dies ist ebenfalls eine monoton wachsende Folge in $\mathcal{P}$. Ferner ist

$$u_f(z_1) \leftarrow w_n(z_1) \leq W_n(z_1) \leq \tilde{W}_n(z_1) \leq u_f(z_1).$$

Nach dem Harnackschen Konvergenzprinzip existiert also ein $W \in H_{\mathbb{R}}(B)$ mit $\tilde{W}_n \to W$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von B. Insbesondere ist $W(z_1) = u_f(z_1)$ und (wegen der Maximalität von u_f) $W(z) \leq u_f(z)$ für alle $z \in B$.

Da nach Definition $v_n \leq W_n$ auf Ω ist, ist nach 10.50 auch $\tilde{v}_n \leq \tilde{W}_n \leq u$ auf Ω. Daher gilt $v \leq W$ auf B und $v(z_0) = W(z_0) = u_f(z_0)$ im Mittelpunkt von B. Aus dem Maximumprinzip folgt dann (wegen $(v - W) \leq 0$ auf B und $(v - W)(z_0) = 0$), dass $v = W$. Insbesondere ist $v(z_1) = W(z_1) = u_f(z_1)$. ◁

10.52. Bemerkung. Für die Aussagen in 10.48 - 10.51 genügt es, dass f auf $\partial_\infty \Omega$ beschränkt ist.

10.53. Zwischenresultat. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \partial_\infty\Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Ferner sei u_f die Perron-Funktion. Dann ist äquivalent

(i) Das Dirichlet-Problem ist für f und Ω lösbar.

(ii) $\lim_{z\to a} u_f(z) = f(a)$ für alle $a \in \partial_\infty\Omega$.

In diesem Fall ist die Lösung gegeben durch

$$u(z) = \begin{cases} u_f(z), & z \in \Omega \\ f(z), & z \in \partial_\infty\Omega. \end{cases}$$

10.54. Beispiel. Es sei $\Omega = B(0,1) \setminus \{0\}$ und $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(0) = 1, \quad f(z) = 0, \quad z \in S(0,1).$$

Dann ist $u_f = 0$, und das Dirichlet-Problem ist *nicht* lösbar.

Beweis. Für $0 < \varepsilon < 1$ definiere

$$u_\varepsilon(z) = \frac{\ln|z|}{\ln\varepsilon}, \quad z \neq 0.$$

Diese Funktionen sind harmonisch auf Ω; sie haben den Wert 0 auf $S(0,1)$ und 1 auf $S(0,\varepsilon)$. Es sei $v \in \mathcal{P} = \mathcal{P}(f,\Omega)$. Dann ist $|v(z)| \leq \max\{|f(a)| : a \in \partial\Omega\}$=1.

Setzen wir also $\Omega_\varepsilon = \{\varepsilon < |z| < 1\}$ so ist u_ε die Lösung des Dirichlet-Problems auf Ω_ε mit Randdaten = 0 auf $S(0,1)$ und = 1 auf $S(0,\varepsilon)$.

Es folgt

$$\limsup_{z\to a} v(z) \leq \begin{cases} f(a) = 0 = u_\varepsilon(a), & a \in S(0,1), \text{ weil } v \in \mathcal{P} \\ 1 = u_\varepsilon(a), & a \in S(0,\varepsilon), \text{ weil } \sup f \leq 1.. \end{cases}$$

Nach Satz 10.44 ist also $v(z) \leq u_\varepsilon(z)$ für alle $z \in \Omega_\varepsilon$. Da ε beliebig war, folgt, dass $v(z) \leq 0$ auf Ω und somit

$$u_f = \sup\{v : v \in \mathcal{P}\} = 0.$$

Damit kann nicht $\lim_{z\to 0} u_f(z) = 1$ gelten. ◁

10.55. Barrieren. Im Folgenden sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Für $a \in \partial_\infty\Omega$ setzen wir

$$\Omega(a,R) = \begin{cases} \Omega \cap B(a,R), & a \neq \infty \\ \\ \Omega \setminus \overline{B(0,\frac{1}{R})}, & a = \infty. \end{cases}$$

Eine Barriere für Ω in a ist eine Familie $(\chi_r)_{0<r\leq r_0}$ mit $r_0 = r_0(a)$ von superharmonischen Funktionen auf Ω so, dass für $0 < r \leq r_0$ gilt

(i) $0 \leq \chi_r \leq 1$;

(ii) $\lim_{z\to a} \chi_r(z) = 0$;

(iii) $\chi_r = 1$ auf $\Omega \setminus \Omega(a,r)$.

10.56. Satz. *Falls zu $a \in \partial_\infty\Omega$ eine Barriere existiert, so gilt*

(1) $$\lim_{z\to a} u_f(z) = f(a) \quad \textit{für jedes in } a \textit{ stetige, beschränkte } f : \partial_\infty\Omega \to \mathbb{R}.$$

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $a \neq \infty$ (anderer Fall analog). O.B.d.A. sei $f(a) = 0$ (sonst betrachte $g(z) = f(z) - f(a)$; dann ist $u_g = u_f - f(a)$). Setze $M = \|f\|_{\sup}$. Dann ist $v(z) \leq M$ für alle $v \in \mathcal{P}$, $z \in \Omega$. Nun sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Weil f stetig in a ist, finden wir zu r_0 aus 10.55 ein $0 < \delta \leq r_0$ so, dass $|f(b)| < \varepsilon$ für alle $b \in \partial_\infty\Omega \cap B(a,\delta)$.

Schritt 1. Zeige: $-M\chi_\delta - \varepsilon \in \mathcal{P}$: Klar: Diese Funktion ist subharmonisch auf Ω. Für alle $b \in \partial_\infty\Omega \setminus B(a,\delta)$ gilt nach 10.55(iii) ferner

$$\limsup_{z\to b}(-M\chi_\delta(z) - \varepsilon) = \limsup_{z\to b}(-M\chi_\delta(z)) - \varepsilon \le -M \le f(b).$$

Ist andererseits $b \in \partial_\infty\Omega \cap B(a,\delta)$, so ist nach 10.55(i)

$$\limsup_{z\to b}(-M\chi_\delta(z) - \varepsilon) \le -\varepsilon \le f(b).$$

Schritt 2. Nach Definition von u_f als Supremum folgt, dass $-M\chi_r(z) - \varepsilon \le u_f(z)$ für alle $z \in \Omega$. Wir zeigen nun, dass $M\chi_r + \varepsilon \ge v$ für alle $v \in \mathcal{P}$.

Dazu: Für $v \in \mathcal{P}$ ist die Funktion $v - M\chi_r - \varepsilon$ subharmonisch auf Ω. Für $b \in \partial_\infty\Omega \setminus B(a,\delta)$ gilt

$$\limsup_{z\to b}(v(z) - M\chi_\delta(z) - \varepsilon) \le f(b) - M - \varepsilon \le 0.$$

Für $b \in \partial_\infty\Omega \cap B(a,\delta)$ gilt

$$\limsup_{z\to b}(v(z) - M\chi_\delta(z) - \varepsilon) \le f(b) - \varepsilon \le 0.$$

Also ist $v - M\chi_\delta - \varepsilon \le 0$ auf Ω nach dem Maximumprinzip.

Schritt 3. Es folgt nun $u_f \ge -M\chi_\delta(z) - \varepsilon$ nach Schritt 1 und $u_f \le M\chi_\delta + \varepsilon$ nach Schritt 2. Somit ist

$$|u_f(z)| \le M\chi_\delta(z) + \varepsilon \overset{z\to a}{\longrightarrow} \varepsilon.$$

Da ε beliebig war, ergibt sich $\lim_{z\to a} u_f(z) = 0 = f(a)$ und damit die Behauptung. ◁

10.57. Bemerkung. Für unstetiges f erhalten wir mit 10.56 Konvergenz $\lim_{z\to a} u_f(z) \to f(a)$ in den Stetigkeitspunkten von f.

Wie sieht so eine Barriere aus? In einfachen Fällen kann man relativ leicht eine basteln:

10.58. Lemma. *Zu $a \in \partial\Omega$ gebe es ein Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{C}$ mit $[a,b] \cap \overline{\Omega} = \{a\}$. Dann existiert eine Barriere in a.*

Insbesondere: Ist Ω ein beschränktes Gebiet und ist ist die obige Bedingung in jedem Randpunkt erfüllt, so ist das Dirichlet-Problem lösbar.

Beweis. Wir betrachten die rationale Funktion $g(z) = \dfrac{z-a}{b-z}$. Für $z \in [a,b[$ mit $z = a + \lambda(b-a)$, $0 \le \lambda < 1$ ist

$$\frac{z-a}{b-z} = \frac{a+\lambda(b-a)-a}{b-a-\lambda(b-a)} = \frac{\lambda(b-a)}{(1-\lambda)(b-a)} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \in \mathbb{R}_{\ge 0}.$$

Daher ist das Bild von $\mathbb{C} \setminus [a,b]$ unter g die einfach zusammenhängende Menge $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\ge 0}$, und $\sqrt{\dfrac{z-a}{b-z}}$ existiert als holomorphe Funktion. Mit der üblichen Wahl des Arguments in $[0, 2\pi[$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\ge 0}$ liegt das Argument der Wurzel in $]0,\pi[$. Somit ist ihr Imaginärteil strikt positiv. Also ist

$$u(z) = \operatorname{Im}\sqrt{\frac{z-a}{b-z}} \text{ harmonisch und positiv auf } \mathbb{C} \setminus [a,b].$$

Da $[a,b] \cap \overline{\Omega} = \{a\}$ ist, ist für $0 < r \le |b-a|$

$$C_r := \min\{u(z) : z \in S(a,r) \cap \overline{\Omega}\} > 0.$$

Wir definieren $\chi_r : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$\chi_r(z) = \begin{cases} \dfrac{\min(u(z), C_r)}{C_r}, & z \in \Omega \cap B(a,r) \\ 1, & z \in \Omega \setminus B(a,r). \end{cases}$$

Dann ist χ_r stetig und $0 \le \chi_r \le 1$. Ferner ist $\chi_r(z) \equiv 1$ außerhalb von $B(a,r)$ und $\lim_{z\to a} \chi_r(z) = 0$.

Klar: χ_r ist konstant, also superharmonisch auf $\Omega \setminus \overline{B(a,r)}$ und superharmonisch auf $\Omega \cap B(a,r)$ als Minimum zweier superharmonischer Funktionen nach 10.46. Was passiert am Rand? Ist $z_0 \in S(a,r) \cap \Omega$, so ist für hinreichend kleines $\rho > 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_r(z_0 + \rho e^{it})\, dt \le 1 = \chi_r(z_0).$$

Somit ist χ_r superharmonisch. Offensichtlich ist $0 \le \chi_r \le 1$, $\chi_r = 1$ auf $\Omega \setminus \Omega(a,r)$ und $\lim_{z\to a} \chi_r(z) = 0$. Damit ist $(\chi_r)_r$ eine Barriere in a. ◁

Es gilt außerdem folgender Satz, den wir hier nicht beweisen können:

10.59. Satz. *Enthält jede Komponente von $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ mindestens zwei Punkte, so existiert in jedem $a \in \partial_\infty \Omega$ ein Barriere. Damit ist das Dirichlet-Problem für Ω für jedes stetige $f : \partial_\infty \Omega \to \mathbb{R}$ eindeutig lösbar.*

10.60. Bemerkung. Enthält eine Komponente nur einen Punkt, so ist das Problem nach Beispiel 10.54 i. Allg. nicht lösbar.

11. Iteration von Polynomen

Wir betrachten einige einfache Beispiele von dynamischen Systemen in $\mathbb{C}$. Sie entstehen durch die Iteration von Polynomen vom Grad $n \geq 2$. Wir betrachten in diesem Abschnitt ein Polynom f der Form

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j, \quad a_n \neq 0.$$

Mit f^k bezeichnen wir die k-fache Iterierte, also

$$f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k-\text{mal}}.$$

Die Julia-Menge.

11.1. Definition. Zum obigen Polynom f definiert man:

(a) Die ausgefüllte Julia-Menge zu f, bezeichnet mit $K(f)$ (oder K, wenn klar ist, welches f gemeint ist), ist definiert durch

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \not\to \infty\}.$$

(b) Die Julia-Menge $J = J(f)$ ist der Rand der ausgefüllten Julia-Menge, d.h. $J(f) = \partial K(f)$.

(c) Die Fatou-Menge $F = F(f)$ ist das Komplement der Julia-Menge.

Ein Punkt z liegt also in der Julia-Menge, falls in jeder Umgebung von z Punkte v und w existieren, so dass $f(v) \to \infty$ and $f(w) \not\to \infty$.

11.2. Beispiel. Wir betrachten $f(z) = z^2$. Hier ist $f^k(z) = z^{2^k}$ Offensichtlich gilt $f^k(z) \to 0$ für $|z| < 1$ und $f(z) \to \infty$ für $|z| > 1$. Also ist in diesem Fall

$$K(f) = \{z : |z| \leq 1\}, J(f) = \{z : |z| = 1\}, F(f) = \{z : |z| \neq 1\}.$$

11.3. Lemma. *Zu dem obigen Polynom f existiert ein $r > 0$ so dass für $|z| \geq r$ gilt $|f(z)| \geq 2r$. Insbesondere: Ist $|f^m(z)| \geq r$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so gilt $f^k(z) \to \infty$.*

Damit gilt für festes z_0 entweder $(f^m(z_0))_m$ ist beschränkt oder $f^m(z_0) \to \infty$.

Beweis. Da $n \geq 2$ ist, finden wir ein r so, dass für $|z| \geq r$ gilt $\frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j||z|^j$ und $\frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq 2|z|$. Mit diesen beiden Ungleichungen folgt

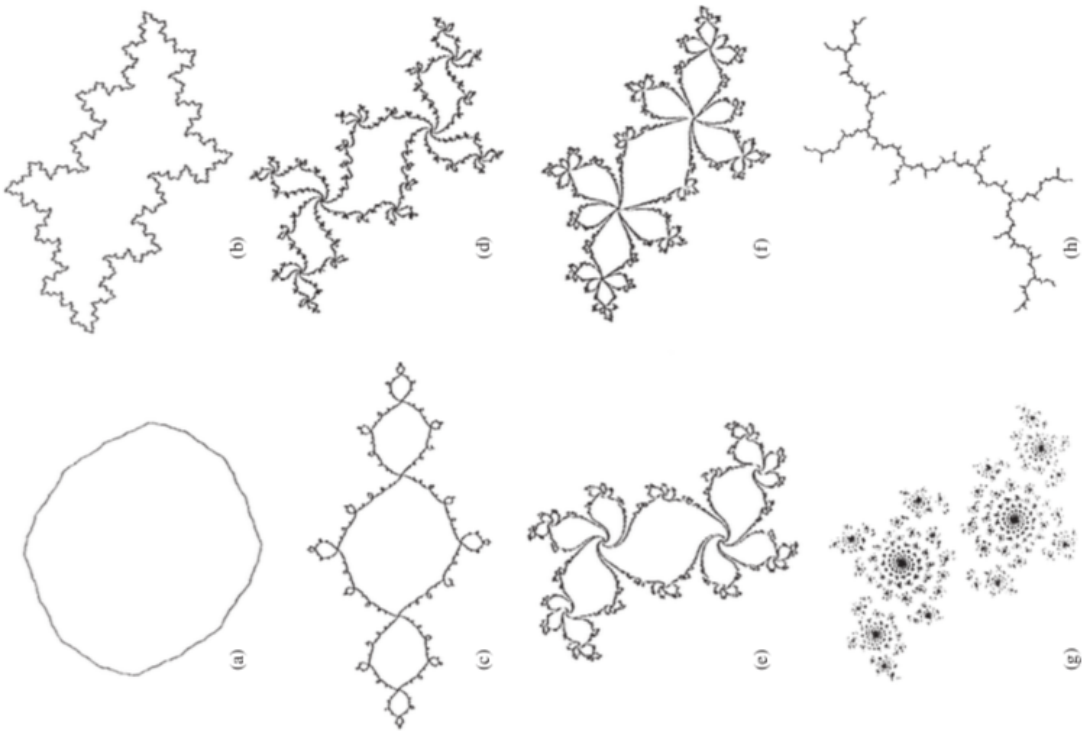
$$|f(z)| \geq |a_n||z|^n - \sum_{j=0}^{n-1} |a_j||z|^j \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq 2|z|.$$

Ist $|f^m(z_0)| \geq r$, so ist $|f^{m+k}(z_0)| \geq 2^k r$, also gilt $f^k(z_0) \to \infty$. ◁

11.4. Lemma. *Die Mengen $J(f)$ und $K(f)$ sind nichtleer und kompakt; $J(f) \subseteq K(f)$. Das Innere von $J(f)$ ist leer.*

Beweis. Nach Lemma 11.3 ist $K(f)$ und damit auch $J(f) = \partial K(f)$ beschränkt. Ist $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K(f)$, d.h. $f^k(z_0) \to \infty$ für $k \to \infty$, so existiert ein m derart, dass $|f^m(z_0)| > r$ für das r aus Lemma 11.3. Da f^m stetig ist, gibt es dann ein $\delta > 0$ so, dass auch $|f^m(z)| > r$ falls $z \in B(z_0, \delta)$. Also ist $\mathbb{C} \setminus K(f)$ offen und somit $K(f)$ abgeschlossen. Nach Heine-Borel ist $K(f)$ kompakt. Damit ist $J(f)$ als Rand einer kompakten Menge ebenfalls kompakt, da abgeschlossen. Als Rand von $K(f)$ hat $J(f)$ per Definition keine inneren Punkte.

Warum ist $K(f)$ nicht leer? Als Polynom vom Grad $n \geq 2$ hat $z \mapsto f(z) - z$ mindestens eine Nullstelle z_0. Dann ist z_0 ein Fixpunkt der Iteration, liegt also in $K(f)$. $\lhd$



Einige Beispiele für Julia-Mengen aus dem Buch von Falconer, S. 254 (um 90° gedreht). Hier ist stets $f(z) = z^2 + c$ mit (a) $c = -0,1 + 0,1i$, (b) $c = -0,5 + 0,5i$, (c) $c = -1 + 0,05i$, (d) $c = -0,2 + 0,75i$, (e) $c = 0,25 + 0,52i$, (f) $c = -0,5 + 0,55i$, (g) $c = 0,66i$, (h) $c = -i$.

11.5. Lemma. *Die Julia-Menge J ist vorwärts- und rückwärts-invariant unter f, d.h. es gilt $f(J) \subseteq J$ und $f^{-1}(J) \subseteq J$.*

Beweis. Es sei $z_0 \in J$. Wäre $f(z_0) \notin K$, so wäre per def. auch $z_0 \notin K$; genauso: wäre ein Urbild von z_0 unter f nicht in K, so auch z_0

Läge $f(z_0)$ im Inneren K° von K, so gäbe es wegen der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$ so, dass für $z \in B(z_0, \delta)$ auch $f(z)$ in K° läge. Damit läge aber nach Definition z_0 nicht in $J = \partial K$. Das Argument zeigt, dass K° in sich abgebildet wird. Läge also $f^{-1}(z_0) \in K^\circ$, so auch z_0. $\lhd$

11.6. Lemma. *Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $J(f) = J(f^m)$.*

Beweis. Aus Lemma 11.3 folgt, dass $f^k(z) \to \infty$ genau dann, wenn $f^{mk}(z) \to \infty$. Es folgt, dass $K(f) = K(f^m)$ und $J(f) = J(f^m)$. $\lhd$

Wir haben in Satz 8.8 gezeigt: Ist $\mathcal{F}$ eine Familie holomorpher Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, so ist $\mathcal{F}$ genau dann relativ kompakt, wenn $\mathcal{F}$ auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gleichmäßig beschränkt ist.

Dass $\mathcal{F}$ relativ kompakt ist, heißt, dass jede Folge in $\mathcal{F}$ eine konvergente Teilfolge hat.

Es gilt folgende (erheblich stärkere) Erweiterung:

11.7. Satz. (Erweiterter Satz von Montel) *Ist (g_k) eine Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet Ω nicht relativ kompakt, und gilt auch nicht $g_k \to \infty$, so existiert zu jedem $w \in \mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme eine Funktion g mit $g(z) = w$.*

Wir nennen im folgenden eine Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet Ω normal in $z \in \Omega$, falls eine Umgebung von z gibt, in der $f(z)$ gleichmäßig beschränkt ist oder gegen ∞ konvergiert. Damit kommen wir zu einer neuen Definition der Julia-Menge:

11.8. Definition. Die Julia-Menge von f ist die Menge aller z, in denen $\{f^k : k \in \mathbb{N}\}$ nicht normal ist.

Überzeugen wir uns, dass beide Definitionen übereinstimmen: Ist $z_0 \in J$ (für die alte Definition), so existieren in jeder Umgebung von z_0 Punkte v, w mit $f^k(v) \to \infty$, während $f^k(w)$ beschränkt ist. Daher gibt es weder eine konvergente Teilfolge der Folge (f^k) noch konvergiert f^k gegen ∞.

Ist $z_0 \notin J$, so liegt z_0 entweder in der offenen Menge $\mathbb{C} \setminus K$; dann gilt in einer Umgebung $f^k \to \infty$ oder z_0 liegt im offenen Inneren von K, dann ist die Folge in einer Umgebung beschränkt, hat also eine konvergente Teilfolge.

Bisher brauchen wir nur eine leichte Erweiterung des Satzes von Montel, wie wir ihn bewiesen haben: Wir müssen nur den Fall dazu nehmen, dass die Folge gegen ∞ konvergiert.

Das folgende Lemma nutzt die volle Stärke des Satzes. Es sagt aus, was in einer Umgebung eines Punkts von J unter der Iteration passiert.

11.9. Lemma. *Es sei U eine Umgebung von $z_0 \in J$. Dann gilt für jedes $j = 1, 2, \ldots$*

$$W = \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U) = \mathbb{C}(\setminus\{w_0\});$$

dabei soll die Notation bedeuten, dass möglicherweise ein einziger Punkt w_0 fehlt. Der Punkt w_0 liegt nicht in J; er ist unabhängig von z_0 und U.

Beweis. Da z_0 in J liegt, ist dort die Folge (f^k) nach Definition nicht normal. Daher ist nach dem erweiterten Satz von Montel das Bild jeder Umgebung U unter den Iterierten $(f^{j+k})_k$ gleich $\mathbb{C}$ mit Ausnahme (möglicherweise) eines Punkts w_0.

Es sei $w_0 \notin W$. Weil f ein Polynom vom Grad ≥ 2 ist, hat $f(z) = w_0$ eine Lösung, etwa $f(w_1) = w_0$. Da $f(W) \subseteq W$ ist, gilt $w_1 \notin W$. Nun enthält aber $\mathbb{C} \setminus W$ nur w_0, so dass $w_1 = w_0$ ist. Somit hat die Gleichung $f(z) - w_0$ nur die Lösung w_0. Andererseits ist f ein Polynom vom Grad $n \geq 2$. Es folgt: $f(z) - w_0 = c(z - w_0)^n$ für eine Konstante $c \neq 0$.

Damit folgt wiederum, dass für alle z nahe bei w_0 gilt, dass $f^k(z) - w_0 \to 0$ für $k \to \infty$, somit $f^k(z) \to w_0$. Insbesondere ist $f^k(z)$ für z in einer hinreichend kleinen Umgebung von w_0 beschränkt. Damit kann w_0 nicht in $J(f)$ liegen.

Diese Überlegung zeigt auch: Enthält $\mathbb{C} \setminus W$ den Punkt w_0, so hat f die spezielle Form $f(z) = w_0 + c(z - w_0)^n$ unabhängig von der Wahl von z_0 oder U. ◁

11.10. Bemerkung.

(a) Ob es einen Ausnahmepunkt gibt, hängt allerdings von U ab: Gilt $f(z) = w_0 + c(z - w_0)^n$ und enthält U den Punkt w_0, so ist $W = \mathbb{C}$, ansonsten ist $W = \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$.

(b) Im Ausnahmefall lässt sich auch $J(f)$ berechnen. Ist $f(z) = w_0 + c(z - w_0)^n$, so kann man analog zu Beispiel 11.2 zeigen, dass

$$J(f) = \{z : |z - w_0| = c^{-1/(n-1)}\}.$$

Dazu beweisen wir mit vollständiger Induktion, dass

$$f^k(z) = w_0 + c^{n^{k-1}+\ldots+n+1}(z-w_0)^{n^k} \overset{\text{geom.Reihe}}{=} w_0 + c^{(1-n^k)/(1-n)}(z-w_0)^{n^k}.$$

Somit gilt $f^k(z) \to w_0$, falls der Summand ganz rechts gegen Null geht, d.h., falls

$$|z-w_0| < \limsup c^{-\frac{n^k-1}{(n-1)n^k}} = c^{-\frac{1}{n-1}}$$

und ebenso $f^k(z) \to \infty$, falls $|z-w_0| > c^{-\frac{1}{n-1}}$.

11.11. Bemerkung. Die k-fache Iterierte f^k eines Polynoms vom Grad n ist ein Polynom vom Grad n^k. Daher hat die Gleichung $f^k(z) = w$ mit Vielfachheit gezählt n^k Lösungen, d.h. viele für großes k.

11.12. Folgerung.

(a) *Für alle $w \in \mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme gilt: Ist U offen und $U \cap J(f) \neq \emptyset$, so gilt $f^{-k}(\{w\}) \cap U \neq \emptyset$ für unendlich viele k. Gibt es einen Ausnahmepunkt, so liegt dieser nicht in $J(f)$.*

(b) *Ist $w \in J(f)$, so gilt*

$$J(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(\{w\})}.$$

Beweis. (a) Ist w nicht der Ausnahmepunkt in Lemma 11.9, so folgt, dass $w \in f^k(U)$ für ein k. Da in Lemma 11.9 der Wert von j beiiebig gewählt werden kann, gilt dies für unendlich viele k. Da damit w höchstens der Ausnahmepunkt in Lemma 11.9 sein kann, gilt $w \notin J(f)$.

(b) "$\supseteq$" Ist $w \in J(f)$ so ist nach Lemma 11.5 auch $f^{-k}(\{w\}) \subseteq J(f)$. Damit ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(\{w\}) \subseteq J(f)$. Da $J(f)$ abgeschlossen ist, gilt das auch für den Abschluss.

"$\subseteq$" Ist $w \in J(f)$ und U eine offene Umgebung eines Punkts $z_0 \in J(f)$, so zeigt (a), dass $f^{-k}(\{w\}) \in U$ für ein (sogar unendlich viele) k. Indem wir $U = B(z_0, \frac{1}{j})$ wählen, finden wir eine Folge (k_j) mit $f^{-k_j}(\{w\}) \in B(z_0, \frac{1}{j})$. Es folgt, dass

$$z_0 \in \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(\{w\})}.$$

Dies liefert die Behauptung. ◁

11.13. Lemma. *$J(f)$ enthält keine isolierten Punkte und ist überabzählbar. Insbesondere müssen wir in 11.12(b) den Abschluss hinzunehmen, sonst enthielte $J(f)$ nur abzählbar viele Punkte.*

Beweis. Es sei $z_0 \in J(f)$ und U eine offene Umgebung von z_0. Wir wollen zunächst zeigen, dass U ein weiteres Element von $J(f)$ enthält. Dazu unterscheiden wir drei Fälle:

(i) $f^k((z_0) \neq z_0$ für alle k. Nach Folgerung 11.12(a) gibt es ein (sogar viele) k mit $f^{-k}(z_0) \in U$ (beachte, dass z_0 nicht der Ausnahmepunkt sein kann, da z_0 in $J(f)$ liegt, vgl. Lemma 11.9). Nach Annahme ($f^k((z_0) \neq z_0$) enthält U also einen weiteren Punkt.

(ii) $f(z_0) = z_0$. Wenn die Gleichung $f(z) = z_0$ keine weiteren Lösungen hat, so sehen wir wie im Beweis von Lemma 11.9, dass $f(z) - z_0 = c(z-z_0)^n$ ist und somit z_0 nicht in $J(f)$ liegen kann. Widerspruch! Folglich existiert ein weiterer Punkt $z_1 \neq z_0$. mit $f(z_1) = z_0$. Wiederum nach Folgerung 11.12(a) existiert ein k mit $f^{-k}(z_1) \ni u \in U$. Nun ist $f^{-k}(z_1) = f^{-k-1}(z_0)$, und da $J(f)$ rückwärtsinvariant unter f ist, liegt $u \in J(f)$. Weiterhin gilt $u \neq z_0$, da $f^k(u) = z_1$ und $f^k(z_0) = z_0$.

(iii) $f^m(z_0) = z_0$ für ein $m > 1$. Nach Lemma 11.6 ist $J(f) = J(f^m)$. Wir können also das Argument aus (ii) auf f^m anwenden und finden einen weiteren Punkt in $J(f^m) = J(f)$.

Somit ist $J(f)$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ohne isolierte Punkte (solch eine Menge nennt man perfekt). Nach einem Satz aus der Topologie, s. Satz 11.14, ist jede perfekte Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ überabzählbar. ◁

11.14. Satz. *Jede perfekte (nichtleere) Teilmenge P eines vollständigen metrischen Raums ist überabzählbar.*

Beweis. (Indirekt) Wir nehmen an, dass $P = \{z_1, z_2, \ldots\}$ und wählen ein $\varepsilon_0 > 0$.

- Da z_1 in P nicht isoliert ist, finden wir ein $y_1 \neq z_1$ mit $y_1 \in B(z_1, \varepsilon_0) \cap P$.
- Wähle ε_2 so klein, dass $z_1 \notin B(y_1, 2\varepsilon_1) \subseteq B(z_1, \varepsilon_0)$. Da y_1 nicht isoliert in P ist, finden wir $y_2 \in B(y_1, 2\varepsilon_1) \cap P$ mit $y_2 \neq y_1$. Indem wir ggf. ε_1 verkleinern, können wir annehmen, dass $y_2 \neq z_2$. Wähle ε_2 so klein, dass $z_2 \notin B(y_2, 2\varepsilon_2) \subseteq B(y_1, \varepsilon_1)$.
- Wir nehmen an, dass wir Elemente $y_1, \ldots, y_k \in P$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k > 0$ gefunden haben, so dass

(1) $$B(y_{j+1}, 2\varepsilon_{j+1}) \subseteq B(y_j, \varepsilon_j), j = 1, \ldots, k-1, \text{ und } z_j \notin B(y_j, 2\varepsilon_j).$$

- Da y_k in P nicht isoliert ist, finden wir ein $y_k \neq y_{k+1} \in B(y_k, \varepsilon_k) \cap P$. Indem wir ggf. ε_k verkleinern, können wir annehmen, dass $y_{k+1} \neq z_{k+1}$. Nun wählen wir ε_{k+1} so klein, dass $z_{k+1} \notin B(y_{k+1}, 2\varepsilon_{k+1}) \subseteq B(y_k, \varepsilon_k)$. Wir erhalten so eine Folge (y_k) in P und $\varepsilon_k > 0$ mit (1).
- Die Mengen $\overline{B(y_j, \varepsilon_j)}$ bilden dann eine Folge abgeschlossener, ineinander enthaltener Mengen, deren Durchmesser gegen Null geht. Da der Raum nach Annahme vollständig ist, enthält der Durchschnitt $\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{B(y_j, \varepsilon_j)}$ genau ein Element y. Da P abgeschlossen ist und die y_j eine Folge in P bilden, die gegen y konvergiert, liegt y in P. Andererseits gilt $z_j \notin \overline{B(y_j, \varepsilon_j)}$, so dass $\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{B(y_j, \varepsilon_j)} \cap P = \emptyset$. Widerspruch. ◁

11.15. Definition. Es sei f ein Polynom und w ein Fixpunkt, d.h. $f(w) = w$.

Man nennt f einen anziehenden Fixpunkt für die Iteration $f \mapsto f^k$, falls eine Umgebung V von w existiert mit $f^k(v) \to w$ für alle $v \in V$.

Man nennt w abstoßend, falls eine Umgebung V von w existiert, so dass für alle $w \neq v \in V$ gilt: Es gibt ein $p = p(v)$ mit $f^p(v) \notin V$.

Ansonsten heißt w neutral.

11.16. Bemerkung. Ist w ein Fixpunkt mit $|f'(w)| < 1$, so ist w anziehend, denn damit ist für alle v in einer Umgebung von w auch $|(f(v) - f(w))/(v - w)| \leq c < 1$, denn die Ableitung ist der Grenzwert der Differenzenquotienten. Wegen $f(w) = w$ folgt $|f(v) - w| \leq c|v - w|$. Somit ist w anziehend.

Analog sieht man: Ist $|f'(w)| > 1$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(v) - w| \geq c|v - w|$ für ein $c > 1$, $v \in B(w, \delta)$. Damit kann $f^k(v)$ nur für endlich viele k in $B(w, \delta)$ liegen ($v \neq w$). Somit ist w abstoßend.

Ist $|f(w)|' = 1$, so kann w anziehend, abstoßend oder neutral sein.

Man nennt einen Punkt w periodisch, falls ein $p \in \mathbb{N}$ existiert mit $f^p(w) = w$. Somit ist w ein Fixpunkt von $g = f^p$.

11.17. Satz. *Die Julia-Menge ist der Abschluss der abstoßenden periodischen Punkte (sogar derer mit Ableitungsbetrag > 1. Wir können hier jedoch nur zeigen:*

(a) Ist $w = f^p(w) = g(w)$ ein periodischer Punkt mit $|g'(w)| > 1$, so ist $w \in J(f)$.

(b) Ein anziehender periodischer Punkt liegt nicht in $J(f)$.

(c) Die Julia-Menge ist im Abschluss der periodischen Punkte von f enthalten.

Beweis. (a) Es sei $w = f^p(w) = g(w)$ und $|g'(w)| > 1$. Wähle ein beliebige Umgebung W von w. Angenommen, die Folge (g^k) ist normal auf W. Dann hat sie eine Teilfolge (g^{k_j}), die gegen eine holomorphe Funktion g_0 konvergiert (sie kann nicht gegen ∞ konvergieren, weil $g(w) = w$. Damit konvergiert aber auch die Folge der Ableitungen $((g^{k_j})')$ gegen g_0'. Nun zeigt jedoch vollständige Induktion, dass $|(g^k)'(w)| = |g'(w)|^k| \to \infty$. (Dazu der Induktionsschritt: Es ist $g^{k+1}(w) = g^k(g(w))$. Also ist

$$(g^{k+1})'(w) = (g^k)'(g(w))g'(w) \overset{g(w)=w}{=} (g^k)'(w)g'(w) \overset{\text{IndAnn}}{=} g(w)^k g(w) = g^{k+1}(w).)$$

Widerspruch. Also ist die Folge nicht normal in W, und w liegt in $J(g)$. Da $J(g) = J(f^p) = J(f)$ nach 11.6 folgt die Behauptung.

(b) Ist $w = g(w)$ anziehend, so existiert eine Umgebung von w, in der $g^k(z) \to w$ konvergiert. Daher kann dort nicht $f^k(z) \to \infty$ gelten.

(c) Wir betrachten die folgende Teilmenge von $J(f)$:

$$E = \{w \in J(f) : \exists v \neq w \text{ mit } f(v) = w \text{ und } f'(v) \neq 0\}.$$

Wir wissen aus Satz 11.13, dass $J(f)$ keine isolierten Punkte enthält. Ist also w_0 ein beliebiger Punkt von $J(f)$, so liegt in jeder Umgebung von w_0 ein weiterer Punkt von $J(f)$. Gilt in w_0, dass $f(v) = w_0$ nur die Lösung $v = w_0$ hat, so hat f die spezielle Form $f(z) = w_0 + c(z - w_0)^n$. In jeder Umgebung finden wir dann einen Punkt in E.

Wir können also annehmen, dass w_0 in E liegt und somit ein v existiert mit $v \neq w$, $f'(v) \neq 0$ und $f(v) = w$. Weil $f'(v) \neq 0$ ist, gibt es disjunkte Umgebungen V von v und W von w_0, so dass $f : V \to W$ eine biholomorphe Abbildung ist, s. Satz 5.2. Es sei f^{-1} die Umkehrabbildung. Wir definieren nun eine Folge h_k auf W durch

$$h_k(z) = \frac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}.$$

Beachte: Der Nenner wird nicht Null, weil V und W disjunkt sind.

Da w_0 in $J(f)$ liegt, ist die Folge (f^k) nicht normal. Damit ist jedoch auch h_k nicht normal, denn aus $h_k(z) \to \infty$ folgt $f_k(z) \to \infty$ und aus $h_k \to h$ folgt $f^k(z) - z \to h(z)(f^{-1}(z) - z)$.

Als nicht-normale Folge nehmen die Folgenglieder nach dem erweiterten Satz von Montel mit höchstens einer Ausnahme alle Werte von $\mathbb{C}$ an. Damit wird einer der Werte 0 oder 1 angenommen. Daher existieren $k_0 \in \mathbb{N}$, $z_0 \in W$ mit $h_{k_0}(z_0) = 0$ oder $k_1 \in \mathbb{N}$, $z_1 \in W$ mit $h_{k_1}(z_1) = 1$.

Im ersten Fall folgt, dass $f^{k_0}(z_0) = z_0$, im zweiten $f^{k_1}(z_1) - z_1 = f^{-1}(z_1) - z_1$. Im ersten Fall ist also $f^{k_0}(z_0) = z_0$, im zweiten $f^{k_1+1}(z_1) = z_1$.

In jeder Umgebung von w_0 existiert also ein periodischer Punkt, somit liegt w_0 im Abschluss der Menge der periodischen Punkte.

(Den fehlenden Teil des Beweises finden Sie bei Steinmetz in Kapitel 3, §6, Auch er beweist zunächst nur (Kapitel 2, §5), dass die periodischen Punkte dicht in der Julia-Menge liegen. Anschließend beweist er, dass es nur endlich viele periodische Punkte geben kann, die nicht abstoßend sind (nach einem Resultat von Douady und Hubbard sind es sogar nur $n - 1$)) ◁

11.18. Definition. Es sei w ein anziehender Fixpunkt. Der Einzugsbereich von w ist die Menge

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \to w \text{ für } k \to \infty\}.$$

Diese Definition können wir für $w = \infty$ ebenfalls verwenden.

11.19. Lemma. *Es sei $w \in \overline{\mathbb{C}}$ ein anziehender Fixpunkt. Dann ist $A(w)$ offen.*

Beweis, Es sei w ein anziehender Fixpunkt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass $f^k(v) \to w$ für alle $v \in B(w, 2\varepsilon)$. Ist $z_0 \in A(w)$, so gilt $f^k(z_0) \to w$, also existiert ein k_0 mit $f^k(z_0)$ in $B(w, \varepsilon)$ für alle $k \geq k_0$. Da f^{k_0} stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ so, dass $|f^{k_0}(z) - f^{k_0}(z_0)| < \varepsilon$ für $z \in B(z_0, \delta)$. Daher folgt, dass $f^k(z) \to w$ für alle $z \in B(z_0, \delta)$. Analog für $w = \infty$ ◁

11.20. Satz. *Ist $w \in \overline{\mathbb{C}}$ ein anziehender Fixpunkt von f, so ist $J(f) = \partial A(w)$.*

Beweis. '$\subseteq$'Ist $z_0 \in J(f)$, so existieren in jeder Umgebung von z Punkte mit $f^k(z) \to \infty$. Daher ist $z_0 \notin A(w)$. Ist andererseits U eine Umgebung von z_0, so existiert nach Lemma 11.9 ein k mit $f^k(U) \cap A(w) \neq \emptyset$. Wegen der Stetigkeit von f^k existieren in jeder Umgebung von z_0 Punkte, die gegen w iterieren. Also ist $z_0 \in \partial A(w)$.

'$\supseteq$' Es sei $z_0 \in \partial A(w)$. Angenommen, $z_0 \notin J(f)$. Dann ist die Folge (f^k) in einer Umgebung U von z_0 normal, hat also eine Teilfolge (f^{k_j}), die gegen eine holomorphe Funktion g oder ∞ konvergiert. Auf der offenen und nichtleeren Menge $U \cap A(w)$ konvergiert (f^{k_j}) gegen w. Somit folgt $f^{k_j} \not\to \infty$ und $g(z) = w$ zunächst für alle $z \in U \cap A(w)$ und dann für alle $z \in U$ wegen der Holomorphie. Damit ist jedoch z_0 ein innerer Punkt von $A(w)$ im Widerspruch zur Annahme. ◁

11.21. Beispiel. Es sei $f(z) = z^2$. Dann hat f auf $\overline{\mathbb{C}}$ die beiden anziehenden Fixpunkte 0 und ∞. Wir wissen: Die Julia-Menge ist $\{z : |z| = 1\}$. Diese ist der Rand von $A(0)$ und von $A(\infty)$.

Die Mandelbrotmenge. Wir betrachten im folgenden nur noch quadratische Polynome der Form

$$f_c(z) = z^2 + c.$$

11.22. Bemerkung. Ist g ein beliebiges quadratisches Polynom, so findet man eine lineare Funktion $h(z) = az - b$ mit $a \neq 0$ und ein c so, dass

$$h^{-1} \circ f_c \circ h = g.$$

Es folgt, dass $h^{-1} \circ f_c^k \circ h = g^k$ für alle k ist. Die Dynamik von g ergibt sich also aus der von f_c. Daher ist es keine große Einschränkung, sich auf die f_c zu konzentrieren.

11.23. Bemerkung. Ist $c \neq w \in \mathbb{C}$, so hat w zwei Urbilder unter f_c, die wir mit $\pm(w - c)^{1/2}$ bezeichnen. Ist U eine offene Kugel, die c nicht enthält, so besteht das Urbild von U aus zwei Komponenten, die jeweils biholomorph durch f auf U abgebildet werden. Lokal ist also die Wahl eines stetigen (sogar holomorphen) Urbilds klar.

11.24. Definition. Wir nennen eine differenzierbare geschlossene Kurve γ in $\mathbb{C}$ eine glatte Jordan-Kurve, falls sie keine Selbstüberschneidung hat.

11.25. Jordanscher Kurvensatz. Ist γ eine glatte Jordankurve mit $\Gamma = \operatorname{Bild} \gamma$, so besteht $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ aus zwei Komponenten, einer beschränkten und einer unbeschränkten. Die beschränkte Zusammenhangskomponente ist einfach zusammenhängend.

Man sagt, ein Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ liege innerhalb von Γ, falls er in der beschränkten und außerhalb, falls er in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente liegt.

Der Satz gilt für stetige Kurven. Der Beweis vereinfacht sich, wenn man sich auf differenzierbar Kurven oder Polygonzüge beschränkt. Unter https://people.math.ethz.ch/∼blatter/VSMP.pdf findet man einen kurzen Beweis von Christian Blatter.

Wir sehen uns nun an, wie die Urbilder von glatten Jordan-Kurven aussehen.

11.26. Lemma. *Es sei γ eine glatte Jordankurve, $\Gamma = \operatorname{Bild} \gamma$.*

(a) *Liegt c innerhalb von Γ, so ist $f_c^{-1}(\Gamma)$ ebenfalls eine glatte Jordankurve. Ferner bildet f_c die Punkte innerhalb von $f_c^{-1}(\Gamma)$ surjektiv auf diejenigen im Inneren von Γ ab und die außerhalb von $f_c^{-1}(\Gamma)$ surjektiv auf diejenigen außerhalb von Γ.*

(b) *Liegt c außerhalb von Γ, so besteht $f_c^{-1}(\Gamma)$ aus zwei disjunktien glatten Jordankurven, von denen keine innerhalb der andern enthalten ist. Ferner bildet f_c das Innere jeder der beiden Kurven surjektiv auf das Innere von Γ ab und das gemeinsame Äußere auf das Äußere von Γ.*

Beweis. Wir beobachten zunächst, dass $f_c^{-1}(z) = \pm(z-c)^{1/2}$ und $(f_c^{-1})'(z) = \pm\frac{1}{2}(z-c)^{-1/2}$ für z in Γ differenzierbar bzw. stetig und jeweils beschränkt sind, weil c innerhalb von Γ liegt.

Wählt man also einen der beiden Zweige der Wurzelfunktion, so ist $f_c^{-1}(\Gamma)$ lokal eine glatte Kurve. Was passiert global?

Wir starten in einem Punkt w von Γ. Dieser hat zwei Urbilder unter f_c, etwa $\pm z_0$. Beginnen wir nun Γ zu durchlaufen, so bilden die Urbilder unter f_c jeweils eine Kurve, etwa C^+, beginnend mit $+z_0$ und C^-, beginnend mit $-z_0$. Kommen wir wieder am Punkt w an, so müssen die Urbildkurven wieder in jeweils einem der beiden Urbilder enden. Es ergeben sich zwei Möglichkeiten.

(i) C^+ endet in $-z_0$ und C^- in $+z_0$; in diesem Fall verbinden sich die beiden Kurventeile zu einer einzigen geschlossenen Urbildkurve, C;
(ii) C^+ endet in $+z_0$ und C^- in $-z_0$; in diesem Fall erhalten wir zwei disjunkte geschlossene Urbildkurven.

Im Fall (i) ist die geschlossene Kurve das Urbild von Γ unter f_c. Sie ist überschneidungsfrei, also wieder eine glatte Jordankurve. Da $f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig und surjektiv ist, bildet sie die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus C$ surjektiv auf die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ ab. Daher ist das Bild des Inneren von C das Innere von Γ und das des Äußeren von C das des Äußeren von Γ. Der Ursprung $z = 0$ liegt stets zwischen den beiden Urbildern von den Punkten auf Γ unter f_c und somit im Inneren von C. Daher liegt in diesem Fall der Punkt $c = f_c(0)$ innerhalb von Γ.

Im Fall (ii) liegen die beiden geschlossenen Kurven C^+ und C^- symmetrisch zum Ursprung. Der Ursprung ist weder im Inneren der einen noch der anderen enthalten (sonst hätte die entsprechende Kurve Windungszahl ± 1 um 0, und das müsste wegen der Symmetrie auch fir die andere gelten; dann wäre 0 aber im Inneren von beiden, was wegen der Disjunktheit nicht sein kann). Das Innere von C^+ und das von C^- werden jeweils auf das Innere von Γ abgebildet (jeder Punkt hat zwei Urbilder!) und das Äußere jeweils auf das Äußere von Γ. Insbesondere liegt in diesem Fall $c = f_c(0)$ außerhalb von Γ.

Unsere erste Definition der Mandelbrot-Menge ist folgende:

11.27. Definition. Die Mandelbrotmenge M ist die Menge aller $c \in \mathbb{C}$, für die $f_c^k(0)$ beschränkt ist.

11.28. Satz. *Folgende Charakterisierungen der Mandelbrotmenge sind äquivalent:*

(i) $M = \{c \in \mathbb{C} : J(f_c)$ *ist zusammenhängend*$\}$
(ii) $M = \{c \in \mathbb{C} : f_c^k(0)$ *ist beschränkt*$\}$
(iii) $M = \{c \in \mathbb{C} : f_c^k(0) \not\to \infty\}$

Es gilt noch mehr: Ist $c \in \mathbb{C}$, so ist entweder $J(f_c)$ zusammenhängend oder $J_c(f)$ ist total unzusammenhängend, d.h. die Zusammenhangskomponente jedes Punktes in $J(f_c)$ enthält keine weiteren Punkte von $J(f_c)$.

Beweis. Nach Lemma 11.3 ist $f_c^k(0)$ genau dann beschränkt, wenn $f_c^k(0) \not\to \infty$. Daher sind (ii) und (iii) äquivalent.

Schritt 1. Wir zeigen: Ist $f_c^k(0)$ beschränkt, so ist $J(f_c)$ zusammenhängend.

Es sei $R > 0$ so groß, dass $B(0, R)$ alle Punkte $f_c^k(0)$, $k = 1, 2, \ldots$ enthält und $f^k(z) \to \infty$ für $|z|$ *geR*. Setze $\Gamma = S(0, 2R)$. Insbesondere gilt damit, dass $J(f_c)$ im Inneren von Γ liegt.

Nach Annahme ist $c = f_c(0)$ im Inneren von Γ. Dann liegt nach Lemma 11.26 das Urbild $f_c^{-1}(\Gamma)$ im Inneren von Γ. Ferner muss auch c im Inneren von $f_c^{-1}(\Gamma)$ liegen, denn anderenfalls läge $f_c(c)$ außerhalb von Γ und es folgte $f_c^k(0) \to \infty$.

Wiederum mit Lemma 11.26 folgt, dass $f_c^{-2}(\Gamma)$ im Inneren von $f_c^{-1}(\Gamma)$ liegt und c im Inneren von $f_c^{-2}(\Gamma)$.

Iterativ erhalten wir eine Folge glatter Jordankurven $\Gamma_k = f_c^{-k}(\Gamma)$ die ineinander liegen, und c liegt im Inneren davon.

Wir bezeichnen mit K die Menge aller Punkte, die auf oder im Inneren jedes der Γ_k liegen. Als Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist K abgeschlossen. Liegt $z \in K$, so liegt auch $f_c^k(z)$ in K für alle k. Liegt z nicht in K, so folgt $f_c^k(z) \to \infty$. Damit ist K gerade die ausgefüllte Julia-Menge von f_c. Nun ist K als Durchschnitt einfach zusammenhängender abgeschlossener Mengen wieder einfach zusammenhängend. Daher ist $J(f_c) = \partial K$ zusammenhängend.

Nun ist K auch gerade die ausgefüllte Julia-Mange von f_c, denn liegt z nicht auf oder im Inneren von gG_p für ein p, so liegt $f_c^p(z)$ außerhalb von Γ und somit gilt $f_c^k(z) \to \infty$. Also ist die Julia-Menge der (zusammenhängende) Rand von K.

Schritt 2. Wir zeigen nur: Ist $f_c^k(0)$ unbeschränkt, so ist $J(f_c)$ nicht zusammenhängend und hat unendlich viele Komponenten.

Wir setzen $\Gamma = S(0, R)$ und wählen R so groß, dass $f_c^{-1}(\Gamma) \subseteq \Gamma$ and dass für alle z außerhalb $\overline{B(0, R)}$ gilt $|z| < |f_c(z)| \nearrow \infty$. Wir können durch leichte Veränderung von R dann auch erreichen, dass keiner der Punkte $f_c^k(0)$ auf Γ liegt. Auch in diesem Fall liegt also $J(f_c)$ im Inneren von Γ.

Es sei p die kleinste Zahl, so dass $f_c^p(0)$ außerhalb von Γ liegt. Genau wie in (a) definieren wir nun $\Gamma_k = f_c^{-k}(\Gamma)$, $k = 1, 2, \ldots$. Für $k < p - 1$ sind dies glatte Jordankurven, denn dann liegt $f_c^k(c)$ innerhalb von Γ und c innerhalb von Γ_k.

Für $k \geq p - 1$ allerdings liegt der Punkt $c = f_c(0)$ außerhalb von Γ_k liegt, weil $f_c^{p-1}(c) = f_c^p(0)$ außerhalb von Γ liegt. Nach Lemma besteht Γ_p aus zwei disjunkten Komponenten, die jeweils Jordankurven sind, Γ_{p+1} aus vier, und Γ_{p+k} aus 2^{k+1}. In jedem Schritt liegt die Julia-Menge in der Vereinigung der Inneren dieser Jordankurven. Da die Julia-Menge nach Lemma 11.5 rückwärtsinvariant unter f ist, ist der Schnitt dieser Inneren mit der Julia-Menge auch jeweils nichtleer. Daher hat die Julia-Menge in diesem Fall unendlich viele Komponenten. ◁

Wir können die Bedingung (ii) in Satz 11.28 präzisieren:

11.29. Satz. $M = \{z \in \mathbb{C} : |f_c^k(0)| \leq 2 \quad \textit{für alle } k\}$.

Beweis. Bezeichnen wir für den Moment die rechte Seite der Aussage mit $\tilde{M}$. Klar ist nach 11.28(ii): $\tilde{M} \subseteq M$.

Um zu zeigen, dass $M \subseteq \tilde{M}$ ist, definieren wir zu $c \in \mathbb{C}$ die Menge

$$W = \{z \in \mathbb{C} : |z] \geq |c| \text{ und } |z| > 2\}.$$

Ist $z \in W$, so ist $|z| \geq 2 + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|f_c(z)| \geq |z|^2 - |c| \geq |z|^2 - |z| \geq |z|(2 + \varepsilon - 1) \geq |z|(1 + \varepsilon).$$

Folglich gilt $f_c(W) \subseteq W$ und $f_c^k(z) \to \infty$ für $z \in W$.

Ist also $c \in M$, so gilt $f_c^k(0) \notin W$ für alle k. Für jedes k gilt also

$$|f_c^k(0)| < |c| \text{ oder } |f^k(0)| \leq 2. \tag{1}$$

Speziell für $k = 1$ sehen wir, dass $|c| \leq 2$. Wenn wir dies in (1) einsetzen, folgt $|f_c^k(0)| \leq 2$ für alle k. ◁

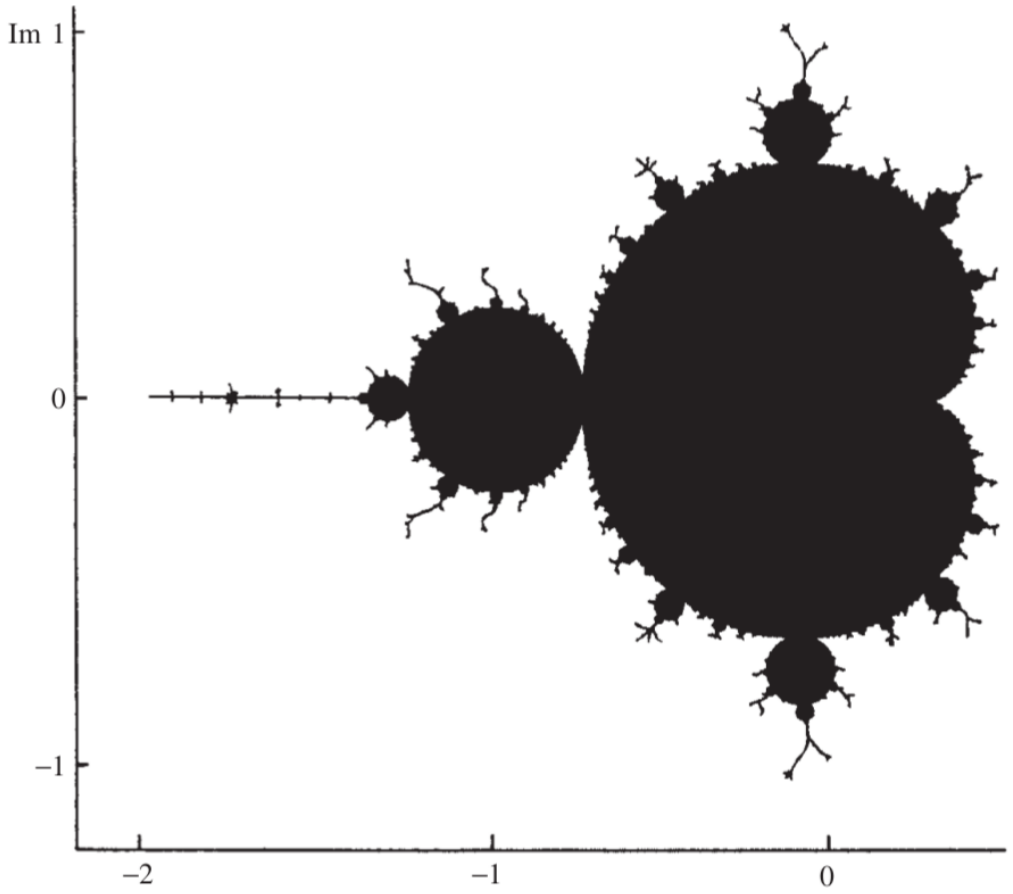
11.30. Folgerung. *M ist kompakt.*

Beweis. Nach Satz 11.30 ist M beschränkt. Um zu sehen, dass M auch abgeschlossen ist, zeigen wir, dass $\mathbb{C} \setminus M$ offen ist:

Ist $c_0 \in \mathbb{C} \setminus M$, so gilt $|f_{c_0}^k(0)| > 2$. Nun ist $f_c^k(0)$ ein Polynom in c und hängt somit stetig von c ab. Folglich gilt auch für alle c in einer Umgebung von c_0, dass $|f_c^k(0)| > 2$. Diese c liegen dann ebenfalls nicht in M. ◁

11.31. Satz. (Douady und Hubbard 1984) *M ist zusammenhängend.*

Einen *Beweis* findet man z.B. bei Beardon §9.10. ◁



Ein Bild der Mandelbrotmenge aus dem Buch von Falconer, S. 244

11.32. Beispiel.

(a) $f_0(z) = z^2$. Hier ist die Folge $(f_0^n(0))_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegeben durch $(0, 0, \ldots)$. Die Folge ist konstant.

(b) $f_{-1}(z) = z^2 - 1$. Hier ist die Iterationsfolge $(0, -1, 0, -1, 0, \ldots)$ 2-periodisch.

(c) $f_{-2}(z) = z^2 - 2$. Hier ist die Iterationsfolge $(0, -2, 2, 2, \ldots)$, d.h. die Folge ist für $n \geq 2$ konstant. Wir wissen aus Satz 11.30, dass $M \subseteq \overline{B(0,2)}$. Tatsächlich ist also -2 ein Randpunkt vom M.

Nun einige Überlegungen zur Gestalt der Mandelbrotmenge.

11.33. Anziehende Fixpunkte. Wann hat f_c einen anziehenden Fixpunkt α in dem Sinn, dass $|f_c'(\alpha)| < 1$?

Es soll gelten $f_c(z) = z$ also

$$z^2 - z + c = 0. \tag{1}$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c} \\ \beta &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c} \end{aligned}$$

die für $c \neq 1/4$ verschieden sind. Es gilt:

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = c.$$

Nun ist $f_c'(z) = 2z$, somit ist

$$f_c'(\alpha) + f_c'(\beta) = 2(\alpha + \beta) = 2.$$

Daher kann nur einer der beiden Punkte α und β anziehend sein (sonst wäre die Summe im Betrag < 2. Es sei o.B.d.A.

$$2|\alpha| = |f_c'(\alpha)| < 1, \text{ d.h. } |\alpha| < \frac{1}{2}.$$

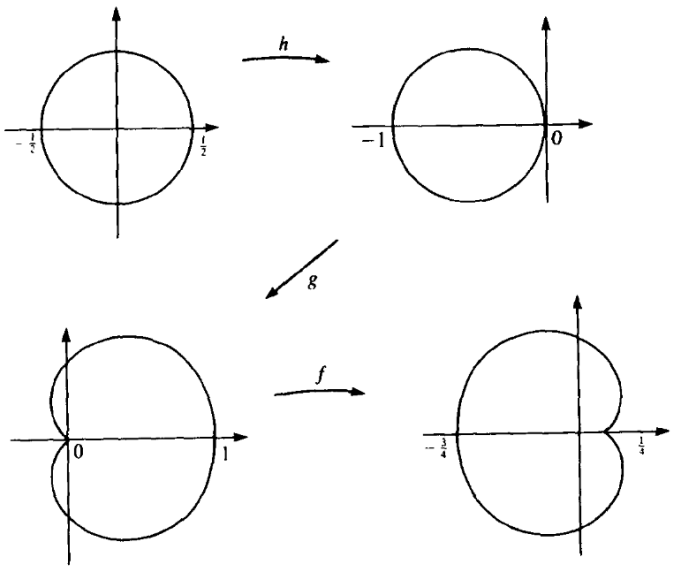
Weil α ein Fixpunkt ist, folgt aus (1), dass

$$c = \alpha - \alpha^2.$$

Die Menge aller c, die wir suchen, ist also gerade das Bild der Kreisscheibe $\{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| < \frac{1}{2}\}$ unter der Abbildung $z \mapsto z - z^2$. Nun gilt $z - z^2 = f \circ g \circ h$, wobei

$$h(z) = z - \frac{1}{2}, \quad g(z) = z^2 \quad f(z) = \frac{1}{4} - z.$$

Diese Menge ist eine Kardioide, wie die folgende Graphik aus dem Buch von Beardon zeigt:



11.34. Anziehende 2-Zyklen. Als nächstes kann sich fragen, wo es anziehende 2-Zyklen gibt für eine Funktion f_c gibt, d.h. Paare (u, v), $u \neq v$, mit $f_c(u) = v, f_c(v) = u$, [1] für die weiterhin gilt

$$|(f_c^2)'(u)| < 1 \text{ und } |(f_c^2)'(v)| < 1. \tag{1}$$

Da es sich um Fixpunkte von f_c^2 handelt, müssen u und v die Gleichung

$$f_c^2(z) - z = 0$$

lösen. Natürlich sind auch die beiden oben gefundenen Werte α und β Lösungen. Insbesondere teilt $f_c(z) - z = z^2 - z - c$ das Polynom $f_c^2(z) - z$. Daher gilt

$$f_c^2(z) - z = (z^2 - z - c)(z^2 + z + 1 + c) = (z - \alpha)(z - \beta)(z - u)(z - v)$$

mit

$$u = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1 - c} \text{ und } v = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 1 - c}.$$

Für die Ableitung gilt

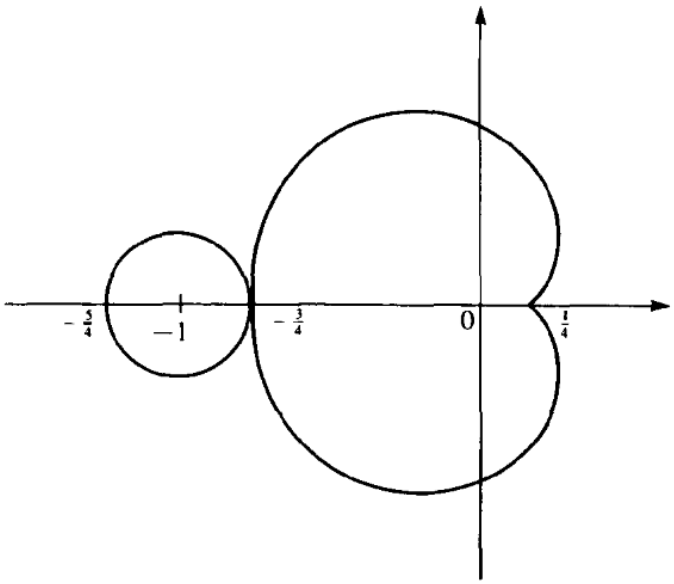
$$(f_c^2)'(u) = f_c'(f_c(u))f_c'(u) = f_c'(v)f_c'(u) = 2u \cdot 2v = 4uv = 4(1 + c).$$

Die Bedingung (1) liefert $4|1 + c| < 1$ bzw., dass f_c genau dann einen anziehenden 2-Zyklus hat, wenn

$$c \in B(-1, 1/4).$$

Wir erhalten also die (aus dem Buch von Beardon entnommene) Gestalt

[1] Das nennen wir einen 2-Zyklus, weil dann $f_c^2(u) = u$ und $f_c^2(v) = v$; die Bedingung $u \neq v$ schließt aus, dass u bzw. v ein Fixpunkt ist.



Für $c \to -3/4$, $\alpha \to -1/2$, $u \to -1/2$, $v \to -1/2$, während $\beta \to 3/2$. Für c innerhalb der Kardioide sind u, v abstoßend.

11.35. Beispiel. Wir betrachten die Iterationsfolge $(c_n) = (f_c^n)(0)$ für reelle c. Die Fixpunkte sind hier

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2} \text{ und } \beta = \frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2}.$$

(a) Ist $c < -2$, so ist $c_n \geq 2 + n|c+2|$ für $n \geq 2$.

(b) Ist $-2 \leq c < 0$, so bildet f_c das Intervall $[-\beta, \beta]$ auf sich ab.

(c) Ist $0 \leq c \leq \frac{1}{4}$, so bildet f_c das Intervall $[0, \alpha]$ auf sich ab.

(d) ist $c > \frac{1}{4}$, so gilt $c_n \geq n(c - \frac{1}{4})$.

Folglich ist $M \cap \mathbb{R} = [-2, \frac{1}{4}]$.

Beweis. (a) Schreibe $c = -2 - \varepsilon$. Dann ist zu zeigen, dass $c_n \geq 2 + n\varepsilon$ für $n \geq 2$. Nun ist

$$c_2 = f_c(c) = c^2 + c = 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 - 2 - \varepsilon = 2 + 3\varepsilon + \varepsilon^2 \geq 2 + 2\varepsilon.$$

Weil $f_c'(z) = 2z$ ist, ist f_c monoton wachsend auf $\mathbb{R}$. Ist $c_n \geq 2 + n\varepsilon$, so ist

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= f_c(c_n) \geq f_c(2 + n\varepsilon) = (2 + n\varepsilon)^2 - 2 - \varepsilon \\ &= 4 + 4n\varepsilon + n^2\varepsilon^2 - 2 - \varepsilon \geq 2 + (4n-1)\varepsilon \geq 2 + (n+1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Vollständige Induktion zeigt die Behauptung.

(d) Schreibe $c = \frac{1}{4} + \varepsilon$. Dann ist zu zeigen, dass $c_n \geq n\varepsilon$. Dies ist richtig für $n = 1$. Stimme die Aussage für ein n, so folgt, weil f_c monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist,

$$c_{n+1} = f_c(c_n) \geq f_c(n\varepsilon) = n^2\varepsilon^2 + \frac{1}{4} + \varepsilon.$$

Daher ist $c_{n+1} \geq (n+1)\varepsilon$ genau dann, wenn $0 \leq n^2\varepsilon^2 + \frac{1}{4} - n\varepsilon = (n\varepsilon - \frac{1}{2})^2$. Das ist richtig. $\lhd$

11.36. Beispiel. Wir wissen: Für $c = 0$ ist die Julia-Menge von f_0 der Einheitskreis $\{|z| = 1\}$. Nun sei $|c| < \frac{1}{4}$ und $|z| < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - |c|}$. Dann gilt $f_c^n(z) \to 0$.

Ist umgekehrt $|z| > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |c|}$, so gilt $f_c^n(z) \to \infty$.

Dies zeigt, dass für kleines $|c|$ die Julia-Menge in dem Ringgebiet

$$R_{|c|} = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - |c|} < |z| < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |c|}\}$$

liegt. Das legt die Vermutung nahe, dass für kleines $|c|$ die Jordan-Menge in etwa eine Kreislinie ist.

Bemerkung. Tatsächlich ist für $|c| < 1/4$ die Jordanmenge $J(f_c)$ eine (allerdings nicht glatte) Jordankurve, s. Falconer. ihre fraktale Dimension ist > 1 für $|c| > 0$.

Beweis. Ist $|z| < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - |c|}$, so ist $|z|^2 < \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4} - |c|} + \frac{1}{4} - |c| = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - |c|} - |c|$, Dann ist $|f_c(z)| = |z^2 + c| \leq |z^2| + |c| < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - |c|}$. Also ist die Iterationsfolge beschränkt.

Ist $|z| = (1 + \varepsilon)(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |c|})$, so ist

$$|f_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z^2| - |c| = (1 + \varepsilon)^2\Big(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |c|} + |c|\Big) - |c| \geq (1 + \varepsilon)|z|.$$

Somit divergiert die Iterationsfolge $(f_c^n(z))$. ◁

Literatur

[1] A. Beardon. Iteration of Rational Functions. Springer, New York 2000.
[2] R. Busam, E. Freitag. Funktionentheorie 1, 4. Auflage, Springer-Verlag, Heidelberg, New York 2006.
[3] K. Falconer. Fractal Geometry. Third edition. Wiley and Sons, Chichester, UK, 2014.
[4] K. Fritzsche. Grundkurs Funktionentheorie. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 2009
[5] W. Rudin. Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
[6] N. Steinmetz. Complex Analytic Dynamical Systems. De Gruyter, Berlin, New York 1993.